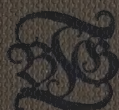
W. Lietzmann

Aufgabensammlung und Leitfaden

für Arithmetik, Algebra und Analysis

Ausgabe B: für Realanstalten

Unterstufe



Verlag von B. G. Teubner · Leipzig und Berlin

Mathem … tswerk
für h … len

unter Mitwirkung … asium in Berlin-
Steglitz … ssel,
hersg. von Oberstu … ule in Göttingen

Der große Erfolg, de … 600 Anstalten be-
weisen, das Werk sei … t, spricht am deut-
lichsten dafür, daß di … haben, im Geiste
der Reformbestrebung … richts zu erzielen,
ohne dabei die altb … u vernachlässigen.
Das Lietzmannsche U … schaft, Kunst und
Volksbildung für gan … r höhere Knaben-
schul … t

Rechenbuch für höhere Knabenschulen von P. B. Fischer. Neubearbeitung.

Ausgabe in 1 Band: 3. Aufl. Mit 35 Figuren. [VIII u. 200 S.] M. 3.60

Ausgabe in 3 Heften: I. Sexta. 3. Aufl. Mit 12 Figuren. [IV, 76 u. 8. S] M. 1.40. II. Quinta. 3., verb Aufl. Mit 20 Figuren. [II, 63 S. und 8 S. Anhang.] M. 1.20. III. Quarta. 3., verb. Aufl. Mit 2 Figuren. [II, 61 S. und 13 S. Anhang.] M. 1.20.

Ergebnisheft dazu in Vorbereitung 1925.

Leitfaden für den Rechenunterricht von O. Richter. Mit 12 Fig. Kart. M. 1.—

Der Leitfaden bietet einerseits den unteren Klassen die durch gemeinsame Arbeit gewonnenen allgemein geltenden Ergebnisse in Form von Erklärungen und Lehrsätzen mit Beispielen dar, andererseits dient er zur Wiederholung und Ergänzung dieser in den oberen Klassen.

Bardeys Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis
Reformausgabe, herausgegeben von W. Lietzmann und P. Zühlke

Ausgabe A für Gymnasien
Unterstufe: 4. durchg. Aufl. Mit 32 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [IX u. 202 S.] . . . . M. 3.20 [1])
Oberstufe: 3. Aufl. Mit 21 Figuren. [VIII u. 170 S.] . . . . M. 2.60 [2])

Ausgabe B für Realanstalten
Unterstufe: 7. Aufl. Mit 33 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [IX u. 220 S.] . . . . . . M. 3.40 [3])
Oberstufe: 4. Aufl. Mit 23 Figuren. [VIII u. 230 S.] . . . . M. 3.60 [4])

dieselbe mit Leitfaden

Ausgabe A für Gymnasien
Unterstufe: 4. Aufl. Mit 77 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [VIII, 202 u. 59 S.] . . . . . M. 4.—
Oberstufe: 2. Aufl. Mit 45 Figuren. [VI, 170 u. 78 S.] . . . . M. 3.80

Ausgabe B für Realanstalten
Unterstufe: 4. Aufl. Mit 83 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [VIII, 220 u. 65 S.] . . . M. 4.40
Oberstufe: 3. Aufl. Mit 50 Figuren. [VI, 230 u. 104 S.] . . . . M. 5.—

Ergebnishefte für die Hand des Lehrers: [1]) 4. Aufl. M. 1.60. [2]) M. 1.30. [3]) 4. Aufl. M. 1.60. [4]) M. 1.80.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Lietzmann, Kn. V. 25. 150.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik und Physik

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Dr. W. Lietzmann Oberstudiendir. d. Oberrealsch. zu Göttingen

und

Dr. A. Witting Oberstudienrat, Gymnasialprof. in Dresden

Mit zahlr. Fig. Kl. 8. Kart. je M. 1.—, Doppelbändchen M. 2.—. Bisher erschienen (1912/25):

Der Gegenstand der Mathematik im Lichte ihrer Entwicklung. Von H. Wieleitner. [In Vorb. 1925.] Bd. 50.
Mathematik und Logik. Von H. Behmann. [In Vorb. 1925.]
Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchgesehene Aufl. Bd. 2.
Ziffern u. Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. Bd. 1. II: Die Zahlzeichen im Mittelalter u. in der Neuzeit. Bd. 1 u. 34.
Die sieben Rechnungsarten mit allg. Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. Bd. 7.
Abgekürzte Rechnung. Von A. Witting. Bd. 47
Elementarmathematik und Technik. Eine Samml. elementarmath. Aufgaben m. Beziehung zur Technik. Von R. Rothe. Bd. 54.
Finanz-Mathematik. (Zinseszinsen-, Anleihe- u. Kursrechnung.) Von K. Herold. Bd. 56.
Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Aufl. I. Grundlehr. II. Anwendung. Bd. 4 u. 33.
Mengenlehre. Von K. Grelling. Bd. 58.
Einführung in die Infinitesimalrechnung. I: Die Differential-, II: Die Integralrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. Bd. 9 u. 41.
Unendliche Reihen. Von K. Fladt. Bd. 61.
Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Von H. Onnen. Bd. 51.
Konforme Abbildungen. Von E. Wicke. [U. d. Pr. 1925.]
Vektoranalysis. Von L. Peters. Bd. 57.
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 3. Aufl. [Ersch. Sommer 1925.] Bd. 3.
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. 2. Aufl. Bd. 26.
Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting. Bd. 43.
Ebene Geometrie. Von B. Kerst. Bd. 10.
Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. Bd. 31.
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. Bd. 32.
Darstellende Geometrie. Von W. Kramer. [U. d. Pr. 1925.]
Darstellende Geometrie d. Geländes u. verw. Anwend. d. Methode d. kot. Projektionen. Von R. Rothe. 2., verb. Aufl. Bd. 35/36.
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke. Bd. 11.
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. 2. Aufl. Bd. 6.
Funktionen, Schaubilder, Funktionstafeln. Von A. Witting. Bd. 48.
Einführung in die Nomographie. Von P. Luckey. I: Die Funktionsleiter. 2. Aufl. [Ersch. Sommer 1925.] Bd. 28. II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. Bd. 37.
Theorie und Praxis des logarithm. Rechenschiebers. Von A. Rohrberg. 2. Aufl. Bd. 23.
Mathematische Instrumente. Von W. Zabel. I. Hilfsmittel und Instrumente zum Rechnen. II. Hilfsmittel und Instrumente zum Zeichnen. [In Vorb. 1925] Bd. 59/60.
Die Anfertigung mathem. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. 2. Aufl. [Ersch. Sommer 1925.] Bd. 16.
Karte und Kroki. Von H. Wolff. Bd. 27.
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Barneck. Bd. 29.
Die mathematischen u. physikalischen Grundlagen der Musik. Von J. Peters. Bd. 55.
Die mathem. Grundlagen der Variations- u. Vererbungslehre. Von P. Riebesell. Bd. 24.
Mathematik und Biologie. Von M. Schips. Bd. 42.
Mathematik und Malerei. 2 Bände. Von G. Wolff. 2. Aufl. [U. d. Pr. 1925]. Bd. 20/21.
Die mathematischen Grundlagen d. Lebensversicherung. Von H. Schütze. Bd. 46.
Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting u. M. Gebhardt. 2. Aufl. Bd. 15.
Archimedes. Von A. Czwalina. [U. d. Pr. 1925.] Bd. 64.
Wie man einstens rechnete. Von E. Fettweis. Bd. 49.
Rechnen der Naturvölker. Von E. Fettweis. [In Vorb. 1925.]
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. Bd. 18.
Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. Bd. 12.
Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 3. Aufl. Bd. 52.
Trugschlüsse. Von W. Lietzmann. 3. Aufl. des 1. Teiles von: Wo steckt der Fehler? Bd. 53.
Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 3. Aufl. Bd. 13.
Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. Bd. 25.
Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. Bd. 5.
Kreisel. Von M. Winkelmann. [In Vorb. 1925.]
Optik. Von G. Günther. [In Vorb. 1925.]
Atom- und Quantentheorie. Von P. Kirchberger. Bd. 44/45.
Ionentheorie. Von P. Bräuer. Bd. 38.
Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich dargestellt von A. Angersbach. Bd. 39.
Drahtlose Telegraphie und Telephonie in ihren physikalischen Grundlagen. Von W. Ilberg. Bd. 62.
Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. Bd. 17.
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. 2., umg. Aufl. Bd. 8.
Mathematische Himmelskunde. Von O. Knopf. [U. d. Pr. 1925.]
Beobachtung des Himmels mit einfachen Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. Bd. 14.
Grundzüge der Meteorologie, ihre Beobachtungsmethoden und Instrumente. Von W. König. [In Vorb. 1925.]
Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. Bd. 40.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematisches Unterrichtswerk
für höhere Knabenschulen

unter Mitwirkung von

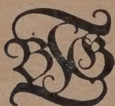
P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz
und Dr. P. Zühlke, Oberschulrat in Kassel

herausgegeben von

Dr. W. Lietzmann
Oberstudiendirektor der Oberrealschule
mit Reform-Realgymnasium
in Göttingen

Aufgabensammlung und Leitfaden
für Arithmetik, Algebra und Analysis

Ausgabe B: für Realanstalten
Unterstufe



Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1924

Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis

Ausgabe B: für Realanstalten

Unterstufe

Auf Grund von E. Bardeys Aufgabensammlung

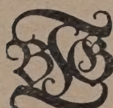
bearbeitet von

Dr. W. Lietzmann

Oberstudiendirektor der Oberrealschule
mit Reform-Realgymnasium
in Göttingen

Vierte, verbesserte Auflage

Mit 83 Figuren im Text
und auf 2 Tafeln



Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1924

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Vielen Wünschen entsprechend füge ich der Reformausgabe des Bardey einen knappen Leitfaden des arithmetisch-algebraischen Lehrstoffes an, der die wichtigsten Erklärungen, Sätze und Methoden, wie ich hoffe, trotz der knappen Fassung in genügender Ausführlichkeit zusammenstellt. Der für die Oberstufe bestimmte Leitfaden, den ich gemeinsam mit Herrn Zühlke herausgebe, wird sehr bald folgen. Wer die Reformausgabe des Bardey in dieser neuen, durch die Hinzufügung des Leitfadens nur um ein Geringes erweiterten Gestalt der jetzt in dritter Auflage erscheinenden Ausgabe ohne Leitfaden vorzieht, wird den Übergang ohne jede Schwierigkeit vollziehen können, da die genaue Übereinstimmung der Aufgaben in Wortlaut, Numerierung und Seitenverteilung eine Benutzung beider Formen nebeneinander in der gleichen Klasse ohne weiteres ermöglicht.

Der Leitfaden, der sich in seiner Gliederung eng an die Aufgabensammlung anschließt, begnügt sich mit den wichtigsten Tatsachen des arithmetisch-algebraischen Lehrstoffes. Er ist naturgemäß systematischer angelegt, als es der Unterricht sein darf, denn er will ja nicht ein Abbild des Unterrichtes sein, sondern nur die Ergebnisse des Unterrichts festlegen, und zwar in einer für den dauernden Gebrauch geeigneten Form. Über den ganzen Charakter des Buches und seine Stellungnahme zur Reformbewegung gilt für den Leitfaden das Gleiche, was ich für die Aufgabensammlung ausgeführt habe, als sie vor vier Jahren zum ersten Male ausgegeben wurde

Jena, im September 1916. **W. Lietzmann.**

Vorwort der vierten Auflage.

Die neuen Auflagen stimmen mit den früheren bis auf geringfügige Änderungen, die fast ausschließlich Druckfehler betreffen, überein.

Wünsche und Vorschläge, die sich auf das Buch beziehen, werde ich von den Herren Amtsgenossen jederzeit dankbar entgegennehmen.

Göttingen, im September 1924. **W. Lietzmann.**

Inhalt.

Aufgabensammlung.

I. Kapitel.

Einführung in die Buchstabenrechnung.

II. Kapitel.

Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen.

III. Kapitel.

Die vier Grundrechenarten mit relativen Zahlen.

IV. Kapitel.

Die vier Grundrechenarten mit Brüchen.

V. Kapitel.

Gleichungen ersten Grades.

XII. Kapitel.

Arithmetische und geometrische Reihen.

Leitfaden.

Erstes Kapitel.

Einführung in die Buchstabenrechnung.

§ 1. Vorübungen; die Zahlengerade.

1. Nenne die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 anfangend. Stelle sie auf der Zahlengeraden dar.

2. a) Was versteht man unter addieren? b) Welches ist das Zeichen der Addition und wie wird es gelesen? c) Wie heißen die Zahlen, die addiert werden? d) Wie heißt das Ergebnis der Addition?

3. Stelle die Aufgabe a) $2 + 4 = 6$, b) $3 + 5 = 8$ auf der Zahlengeraden dar.

4. Bilde auf der Zahlengeraden a) $3 + 5 + 2$, b) $2 + 3 + 7$. c) In welcher Richtung schreitet man auf der Zahlengeraden bei der Addition fort?

5. Ist die Addition zweier Zahlen stets ausführbar?

6. a) Was versteht man unter subtrahieren? b) Welches ist das Zeichen der Subtraktion und wie wird es gelesen? c) Wie heißt die Zahl, die subtrahiert wird, und die Zahl, von der subtrahiert wird? d) Wie heißt das Ergebnis der Subtraktion?

7. Stelle die Aufgabe a) $6 - 4 = 2$, b) $8 - 3 = 5$ auf der Zahlengeraden dar, c) In welcher Richtung schreitet man auf der Zahlengeraden bei der Subtraktion fort?

8. Untersuche, wann die Subtraktion ausführbar ist und wann nicht.

9. Bilde auf der Zahlengeraden a) $3 + 5 - 2$, b) $7 + 3 - 5$, c) $8 - 4 + 2$, d) $13 - 3 - 5$.

10. a) Was versteht man unter multiplizieren? b) Welches ist das Zeichen der Multiplikation, und wie wird es gelesen? c) Wie heißen die Zahlen, die multipliziert werden? d) Wie heißt das Ergebnis der Multiplikation?

11. Führe die Multiplikation a) $3 \cdot 4 = 12$, b) $2 \cdot 5 = 10$ auf der Zahlengeraden aus. Stelle auf der Zahlengeraden c) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5$, d) $4 \cdot 5 - 2 \cdot 4$ dar.

12. Ist die Multiplikation zweier Zahlen stets ausführbar?

13. a) Was versteht man unter dividieren? b) Welches ist das Zeichen der Division, und wie wird es gelesen? c) Wie heißt die Zahl, die dividiert wird, und die Zahl, durch die dividiert wird? d) Wie heißt das Ergebnis der Division?

14. Führe die Division a) $8 : 2$, b) $6 : 3$ auf der Zahlengeraden aus. c) Addiere auf der Zahlengeraden die Quotienten $12 : 3$ und $10 : 5$.

15. Untersuche, wann die Division ohne Rest ausführbar ist und wann nicht.

Beziehungen zwischen den Rechenoperationen.

16. Wie hängt die Subtraktion mit der Addition zusammen? Welche Größen bei der Addition entsprechen den Größen, die bei der Subtraktion vorkommen?

17. Inwiefern ist die Subtraktion die Umkehrung der Addition (die ihr entgegengesetzte, inverse Operation)?

18. Wie hängt die Addition mit der Multiplikation zusammen, und was heißt demnach multiplizieren?

19. Wie hängt die Division mit der Multiplikation zusammen? Welche Größen bei der Multiplikation entsprechen den Größen, die bei der Division vorkommen?

20. Inwiefern ist die Division die Umkehrung der Multiplikation (die ihr entgegengesetzte, inverse Operation)?

21. a) Welche der vier ersten Rechenoperationen sind Operationen gleicher Stufe? b) Welches sind die Operationen erster Stufe? Welches sind die Operationen zweiter Stufe?

22. Wie heißen die Größen in den folgenden Verbindungen: a) $12 + 4 = 16$, b) $16 - 4 = 12$, c) $4 \cdot 5 = 20$, d) $20 : 4 = 5$?

Reihenfolge der Rechenoperationen.

23. Berechne a) $5 \cdot 10 + 12$, b) $13 + 2 \cdot 39$, c) $0{,}5 + 4 \cdot 0{,}7$, d) $18 - 2 \cdot 7$, e) $288 - 17 \cdot 12$.

24. Berechne a) $12 \cdot 4 + 7 \cdot 18$, b) $\frac{1}{2} \cdot 5 + 4 \cdot \frac{1}{3}$, c) $17 \cdot 4 - 3 \cdot 18$, d) $0{,}8 \cdot 12 - 3 \cdot 1{,}5$.

25. Berechne a) $385 : 77 + 8$, b) $7 : 5 + 0{,}5$, c) $111 : 37 - 2$, d) $111\,111 : 37 - 33 : 3$, e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} : \frac{1}{4}$.

§ 2. Benutzung von Buchstaben in Rechenausdrücken.

1. Wie groß ist der Inhalt eines Quadrates in qcm, wenn eine Seite a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6, f) 25, g) a, h) n cm lang ist?

2. Wie groß ist der Inhalt eines Rechtecks in qcm, wenn die Seiten a) 3 und 2, b) 4 und 2, c) 5 und 2, d) 10 und 2, e) a und 2, f) a und 3, g) a und 4, h) a und 12, i) a und b cm lang sind?

3. Was bedeutet a) $3a$, b) $4x$?

4. a) Lies in zweifacher Weise ab, $5a$, xy, $9x$. b) Wie kann man diese Ausdrücke noch schreiben?

5. Was erhält man, wenn man a) a und b, b) $2x$ und $3y$, c) 7 und c, d) $7n$ und $4n$, e) $1\frac{1}{2}p$ und $3\frac{1}{2}p$ addiert?

6. Welche Summe geben a) m und n, b) 7 und p, c) $8u$ und $5v$, d) $13x$ und $7x$, e) y und y, f) n und $9n$, g) $3\frac{3}{4}a$ und $5\frac{3}{4}a$, h) $1\frac{2}{3}b$ und $\frac{5}{6}b$, i) $8c$ und $\frac{17}{3}c$, k) $\frac{5}{3}d$ und $\frac{7}{4}d$?

7. Fasse die folgenden Aufgaben in Worte: a) $x + y$, b) $2p + 3q$, c) $3n + 2n$, d) $7v + 7$, e) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a$.

8. Was erhält man, wenn man a) m von n, b) 9 von a, c) x von $2y$, d) $7n$ von $13n$, e) $7\frac{1}{2}z$ von $10\frac{1}{2}z$ subtrahiert (die an zweiter Stelle genannten Zahlen müssen in jedem Falle größer sein als die an erster Stelle genannten)?

9. Welche Differenz ergeben die Zahlen: **a)** a und b, **b)** x und 3, **c)** 8 und p, **d)** u und v, wenn die erste der genannten Zahlen in jedem Falle die größere ist und als Minuend angesehen wird?

10. Fasse die folgenden Aufgaben in Worte: **a)** $x - y$, **b)** $2p - 3q$, **c)** $3u - 2u$, **d)** $7v - 7$, **e)** $\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}a$. Welche Bedingung muß dabei in jedem Falle erfüllt sein?

11. Was erhält man, wenn man **a)** m mit n, **b)** x mit y, **c)** 7 mit c, **d)** a mit 5 multipliziert?

12. Wie heißen die Produkte der Zahlen: **a)** d und c, **b)** x und a, **c)** 17 und m, **d)** p und 15?

13. Fasse die folgenden Aufgaben in Worte: **a)** $x \cdot y$, **b)** $7 \cdot a$, **c)** $n \cdot 5$, **d)** $b \cdot b$.

14. Was erhält man, wenn man **a)** x durch y, **b)** c durch 8, **c)** 19 durch a dividiert?

15. Wie heißen die Quotienten, wenn Divisor und Dividendus sind: **a)** a und b, **b)** 4 und c, **c)** r und q?

16. Fasse die folgenden Aufgaben in Worte: **a)** $x : y$, **b)** $a : 7$, **c)** $5 : n$.

17. **a)** Wie heißt die $n$te ganze Zahl? **b)** Wie heißt die auf eine ganze Zahl a folgende ganze Zahl? **c)** Wie heißt die der ganzen Zahl m vorangehende ganze Zahl?

18. Welche Zahl ist **a)** um 1 größer als a, **b)** um 5 größer als b, **c)** um m größer als n, **d)** um $2p$ größer als $5q$, **e)** um $7x$ größer als $11x$, **f)** um $3\frac{1}{2}z$ größer als $7\frac{1}{2}z$?

19. Um wieviel ist **a)** $x + 3$ größer als x, **b)** a größer als b, **c)** 7 größer als m, **d)** $9x$ größer als $5y$, **e)** $10n$ größer als $6n$, **f)** $9\frac{1}{4}a$ größer als $7a$?

20. Welche Zahl ist **a)** um p kleiner als q, **b)** um 1 kleiner als m, **c)** um $20u$ kleiner als $23v$, **d)** um $17x$ kleiner als $20x$, **e)** um n kleiner als $2n$?

21. Zwischen welchen zwei ganzen Zahlen liegt eine ganze Zahl **a)** x, **b)** $x + 3$, **c)** $a - 7$?

22. Welche Zahl ist **a)** 9mal so groß wie a, **b)** 10mal so groß wie b, **c)** $x$mal so groß wie y?

23. Welche Zahl ist **a)** die Hälfte von a, **b)** der sechste Teil von c, **c)** der $n$te Teil von x?

24. In welcher Weise lassen sich alle geraden ganzen Zahlen durch n ausdrücken, wenn n eine ganze Zahl bedeutet?

25. In welcher Weise lassen sich alle ungeraden ganzen Zahlen durch n ausdrücken, wenn n eine ganze Zahl bedeutet?

26. Welches ist die Form aller ganzen Zahlen, welche **a)** durch 3, **b)** durch 4, **c)** durch 10, **d)** durch a teilbar sind?

27. Welches ist die Form aller ganzen Zahlen, welche **a)** durch 5 geteilt den Rest 3, **b)** durch 6 geteilt den Rest 1, **c)** durch 12 geteilt den Rest 6 ergeben?

28. Wie kann man kürzer schreiben: **a)** $x + x$, **b)** $a + a + a + a$, **c)** $y + y + y + y + y$?

29. Wie kann man **a)** $7 \cdot 7$, **b)** $25 \cdot 25$, **c)** $a \cdot a$, **d)** $2 \cdot 2 \cdot 2$, **e)** $m \cdot m \cdot m$, **f)** $x \cdot x \cdot x \cdot x$ kürzer schreiben?

30. Was bedeutet a) 3^2, b) 2^3, c) 5^3, d) b^2, e) n^3, f) y^4?

31. Trage in die Zahlengerade die Reihe folgender Zahlen ein: a) 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, b) 3, 3^2, 3^3, 3^4, c) 4, 4^2, 4^3 (Maßeinheit 1 mm).

§ 3. Auswertung von Buchstabenausdrücken.

1. a) Welche Werte hat $a + 4$ für $a = 1, 2, 3, \ldots 10$? b) Gib die Werte auf der Zahlengeraden an.

2. a) Welche Werte hat $13 - b$ für $b = 1, 2, 3, \ldots 10$? b) Gib die Werte auf der Zahlengeraden an.

3. a) Welche Werte hat $3a$ für $a = 1, 2, 3, 4, 5$; b) für $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$? c—d) Gib die Werte auf der Zahlengeraden an.

4. a) Welche Werte hat $\frac{1}{4}b$ für $b = 1, 2, 3, 4$; b) für $b = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$? c—d) Zeichne die Werte auf einer Zahlengeraden mit genügend großem Maßstab (Maßeinheit 10 cm).

5. a) Welche Werte nimmt $a + b$ an, wenn a und b die Zahlen von 1 bis 5 durchlaufen? (Wieviel Aufgaben sind das?) b) Zeichne $a + b$, wenn a und b als Strecken gegeben sind.

6. Welche Werte hat $a + 2b$ a) für $b = 100$, wenn a die Vielfachen von 10 durchläuft; b) für $a = 100$, wenn b die Vielfachen von 10 durchläuft? c) Zeichne $a + 2b$, wenn a und b als Strecken gegeben sind.

7. Welche Werte nimmt a) $4n + 1$, b) $4n - 1$, c) $8n + 5$ an, wenn n die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft?

8. a) Welche Werte hat $a - b$, wenn a die Reihe der ganzen Zahlen, von 6 beginnend, durchläuft und $b = 4$ ist? b) Zeichne die Resultate in die Zahlengerade ein. c) Zeichne $a - b$, wenn a und b $(a > b)$ als Strecken gegeben sind.

9. a) Welche ganzzahligen Werte darf b in $a - 3b$ durchlaufen, wenn $a = 12$ ist, b) wenn $a = 30$ ist?

10. a) Zeichne $a + b - c$, wenn a, b und c als Strecken gegeben sind. b) Wann ist die Zeichnung nur möglich?

Gib an, welchen Wert die Ausdrücke

11. $a - b + c - d$. **12.** $a - b - c + d$.

13. $a + b - c - d$. **14.** $a + b + c - d$.

für die folgenden Werte annehmen:

a) $a = 30$, $b = 12$, $c = 3$, $d = 2$;
b) $a = 96$, $b = 36$, $c = 6$, $d = 3$;
c) $a = 72$, $b = 12$, $c = 6$, $d = 2$.

Gib von den folgenden Ausdrücken an, welchen Wert sie annehmen, wenn a und b nacheinander a) die Werte 1 und 1, b) 1 und 2, c) 2 und 1, d) 2 und 2, e) 3 und 1, f) 1 und 3 annehmen. Zeichne die Werte für jeden Ausdruck in die Zahlengerade ein:

15. $3a + 7b$. **16.** $6a - 2b$.

17. $\frac{1}{3}a + 1\frac{1}{2}b$. **18.** $2\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$.

19. $0{,}2a + 7{,}5b$. **20.** $5{,}5a - 0{,}5b$.

21. Welche Zahlen erhält man, wenn man in $a + 10b$ die Zahlen a und b alle ganzen Zahlen von 0 bis 9 durchlaufen läßt?

22. In welcher Form lassen sich alle dreizifferigen Zahlen darstellen?

23. a) Welche Werte nimmt das Produkt $a \cdot b$ an, wenn a den konstanten Wert 7 hat und b die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. b) wenn b konstant gleich 5 bleibt und a variiert? c—d) Darstellung auf der Zahlengeraden in geeignetem Maßstabe (Maßeinheit 1 mm).

24. a) Welche Werte nimmt $a \cdot a + b \cdot b$ an, wenn a und b der Reihe nach alle ganzen Zahlen von 1 bis 7 durchlaufen? Die Werte sind ihrer Größe nach zu ordnen. b) Zeichne die erhaltenen Werte in die Zahlengerade ein (Maßeinheit 1 mm).

25. a) Welche Werte nimmt $a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c$ an, wenn a, b und c alle ganzen Zahlen von 1 bis 4 durchlaufen? b) Zeichne die erhaltenen Werte in die Zahlengerade ein (Maßeinheit 1 mm).

26. a) In welchen Fällen geht die Division $a : b$ ohne Rest auf, wenn $a = 60$ und b eine ganze Zahl ist? b) Darstellung auf der Zahlengeraden in geeignetem Maßstabe.

27. a) Welche Bruchwerte ergeben sich als Resultat der Division $a : b$, wenn $a = 12$ ist und b die Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis 24 durchläuft? b) Stelle die Ergebnisse von a) auf der Zahlengeraden dar.

Gib an, welche Werte die Ausdrücke

28. $\frac{1}{2}a : b$ **29.** $6a : b$ **30.** $4b : a$

für die bei Aufgabe 15 bis 20 angegebenen Werte a und b annehmen.

§ 4. Identische und Bestimmungsgleichungen.

Prüfe die Richtigkeit folgender Gleichungen:

1. $a \cdot b + b \cdot a = 2 \cdot a \cdot b$, **2.** $7 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot a = 9 \cdot a \cdot b$,

3. $n + a + b - n = a + b$, **4.** $n - a + b - n = b - a$

für folgende Werte:

	a	b	n
a)	7	8	10
b)	113	287	150
c)	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$
d)	0,37	1,21	1,04.

Stelle fest, für welche Werte die folgenden Gleichungen richtig sind, indem du die auftretende unbestimmte Zahl die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufen läßt:

5. $7y = 35.$ **6.** $3y = 27.$

7. $\frac{y}{2} = 4.$ **8.** $14 = 7x.$

9. $60 : x = 4.$ **10.** $45 : x = 3.$

11. $y : 16 = 48.$ **12.** $x : 7 = 213.$

13. $111 : x = 3.$ **14.** $999 : x = 37.$

15. $3x + 20 = 170.$ **16.** $12 = x - 5.$
17. $110 - 50x = 10.$ **18.** $25 = 40 - 3x.$

Stelle durch Probieren fest, für welche ganzen Zahlen x und y die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

19. $2x + y = 15.$ **20.** $3x + y = 35.$
21. $2x + 3y = 60$ **22.** $x - y = 7.$

Stelle durch Probieren mit einzelnen Zahlenwerten fest, welche von den folgenden Gleichungen identische und welche Bestimmungsgleichungen sind:

23. $a + 1 = n + a - n + 1.$
24. $a + b - c = a - c + b.$
25. $a + 1 = 7.$
26. $7 + a = 70.$
27. $x + xy + y = y + yx + x.$
28. $2ax = 4a.$

Zweites Kapitel.

Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen.

§ 5. Addition und Subtraktion eingliedriger Größen.

Addition.

1. Zeige an der Zahlengeraden, daß

I. $a + b = b + a,$

II. $a + b + c = a + c + b = c + b + a$

ist; setze **a)** $a = 3,\ b = 5,\ c = 2,$ **b)** $a = 1,\ b = 4,\ c = 2\frac{1}{2}.$ **c)** Wähle a, b und c als beliebige Strecken.

Berechne auf die einfachste Weise:

2. $793 + 856 + 7.$ **3.** $457 + 796 + 543.$
4. $3a + 7b + 5a.$ **5.** $x + 3y + 9x.$
6. $7a + b + 3a + b.$ **7.** $a + 7b + b + 2a.$
8. $17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23.$
9. $96 + 98 + 100 + 102 + 104.$
10. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19.$
11. $7m + 6n + 5p + 6n + 8p + 4m.$
12. $3a + 9b + 4b + 15a + 7b + 2a.$
13. $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a.$
14. $7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 7\frac{2}{3}.$
15. $8\frac{5}{6} + 7\frac{3}{7} + 4\frac{5}{8} + 5\frac{2}{7} + 5\frac{3}{8} + 3\frac{1}{6}.$
16. $8{,}5 + 9{,}75 + 7{,}5 + 2{,}25 + 5.$
17. $8{,}28 + 3{,}17 + 4{,}3 + 3{,}72 + 5{,}7 + 1{,}5.$

Addition und Subtraktion.

18. Zeige an der Zahlengeraden, daß

$$\text{I.}\quad a+b-b=a,$$
$$\text{II.}\quad a-b+b=a,$$
$$\text{III.}\quad b+a-b=a$$

ist.

Berechne auf die schnellste Weise oder bringe auf die einfachste Form:

19. $9a-7x+7x$. **20.** $4x-5a+5a$.

21. $7a-y+y+3a$. **22.** $4x+6a+3x-6a$.

23. $3x+7a+2b-3x$. **24.** $2y+3a-2y+2a$.

25. Zeige an der Zahlengeraden, daß

$$\text{I.}\quad a+b-c=a-c+b,$$
$$\text{II.}\quad a-b-c=a-c-b$$

ist.

26. Vertausche auf alle mögliche Weise in dem Ausdruck

a) $a-3+4+2$, **b)** $x+17-13+5$

die in Ziffern gegebenen Summanden oder Subtrahenden und zeige, daß die Reihenfolge der aufeinanderfolgenden Additionen und Subtraktionen willkürlich ist.

Vereinfache die Ausdrücke:

27. $7a+5b-4a$. **28.** $9a-4b+a$.

29. $20-7x+9$. **30.** $8x-5+3x$.

31. $793+829-93$. **32.** $3861+954-1861$.

33. $3\frac{5}{7}+4\frac{1}{2}-2\frac{5}{7}$. **34.** $5\frac{3}{4}-3\frac{1}{2}+1\frac{3}{4}$.

35. $23-3x-9$. **36.** $8a-4b-a$.

37. $7309-5418-1309$. **38.** $38765-17609-18765$.

39. $7a+5b-3c-4b$. **40.** $8x+9-5x-9$.

41. $9a+5b-3b$. **42.** $15x-7n+11n$.

43. $19a-8x+5x$. **44.** $21x+14y-19y$.

45. $7b+4c-12b$. **46.** $d+7c-8d$.

47. $91a-71b+18b$. **48.** $47x+y-31y$.

49. $34x-21y+57y$. **50.** $m+5n-99m$.

51. $9a-3b+5a+7b-8a-b$.

52. $10a-8b-3b-6a+12b$.

53. $5a-7x+5x-3a+2x-a$.

54. $x-3y+5x-4y+8y-6x$.

55. $4a-5b+3c-2b-c+a+9b+3a$.

56. $5a+8b-7c-2a-9b+2c-2a+2b+6c$.

57. $11m+3n-7x+m-5n-2x-m+5n+9x$.

58. $10m+11-5x-12-4m-3x+1+9x-5m$.

59. $9a - 7b + 3c - 8a + 7b - 5c - 3b - 9c.$

60. $13x - 5y + 8z - 5x + 9y - 11z - 3x - 6y + z.$

61. $27m - 31n + 9x - 31m - 3x + 21n + 5m + 9n - 7x.$

62. $28a + 29p + 109 - 46p - 18a - 37 - 10p - 160.$

63. $5\frac{1}{4}a - 3\frac{1}{2}b + 6b - 3\frac{1}{2}a + 7c - 8\frac{1}{2}c.$

64. $7\frac{2}{3}a - 5b - 9\frac{1}{6}a + 7b + 3a - 5\frac{1}{2}b.$

65. $\frac{4}{5}a - \frac{7}{2}b + \frac{3}{7}a - \frac{2}{3}b - a.$

66. $\frac{7}{3}a - 2b - \frac{7}{2}a + 3\frac{1}{2}b + \frac{7}{6}a.$

67. $\frac{5}{4}x + \frac{7}{8}y - \frac{3}{4}y - \frac{3}{8}x - \frac{5}{12}y - \frac{5}{12}x.$

68. $3\frac{1}{2}a - 7b + 3\frac{1}{3}c - 7a + 3\frac{1}{3}b - 5c + 4a - 1\frac{1}{3}b.$

69. $7a + 3\frac{1}{2}b + 5c + 3\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{4}b - 7\frac{1}{4}c - 5\frac{1}{3}a - 4\frac{1}{4}b.$

70. $7\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c + 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b + \frac{1}{3}c - \frac{17}{2}a + \frac{15}{2}b + 2\frac{1}{6}c.$

71. $7{,}3a - 3{,}05b + 1{,}49b + 6{,}8c - 9{,}42c + 18{,}9a + 1{,}56b.$

72. $8{,}0007x - 3{,}89y - 9{,}843x + 3{,}007y + 2{,}1723x + 0{,}883y.$

73. $5{,}37t - 9{,}387n - 0{,}9p + 1{,}687n - 3{,}89t - 2{,}4p + 0{,}72t.$

74. $9\frac{1}{2}x - \frac{5}{8}y + 3\frac{3}{5}z - 2{,}9x + 0{,}295y + 5{,}4z.$

75. $9{,}8x - 3\frac{1}{6}x - 0{,}727y + \frac{3}{5}y - 6\frac{1}{12}x + 0{,}127y.$

76. In der Summe $a + b = 100$ durchläuft **a)** a die Zahlen 1, 2, 3 usf. bis 99. Welche Zahlen durchläuft b? **b)** Welche Zahlen durchläuft a, wenn b die Zahlen 1, 2, 3 usf. bis 99 durchläuft?

77. a) In der Summe $a + b = 35$ wächst ein Summand um 1, 2, 3 usf. bis 10, der andere bleibt konstant. Wie ändert sich die Summe? **b)** Der eine Summand nimmt ab um 1, 2, 3 usf. bis 10, der andere bleibt konstant. Wie ändert sich die Summe?

78. a) In der Summe $a + b = c$ wachsen die beiden Summanden gleichzeitig um 1, 2, 3 usf. bis 10. Wie ändert sich die Summe? **b)** Die beiden Summanden nehmen gleichzeitig um 1, 2, 3 usf. bis 10 ab. Wie ändert sich die Summe? **c)** Der eine Summand wächst um 1, 2, 3 usf. bis 10, während der andere gleichzeitig um die gleiche Zahl abnimmt. Wie ändert sich die Summe?

79. In der Differenz $a - b = 20$ durchläuft **a)** b die Zahlen 1, 2, 3 usf. bis 30. Welche Zahlen durchläuft a? **b)** Welche Zahlen durchläuft b, wenn a die Zahlen 21, 22 usf. bis 35 durchläuft?

80. a) In der Differenz $a - b = 26{,}5$ wächst der Minuendus um 1, 2, 3 usf. bis 10, der Subtrahendus bleibt konstant. Wie ändert sich die Differenz? Wie ändert sich die Differenz, **b)** wenn der Minuendus um 1, 2, 3 usf. bis 10 abnimmt und der Subtrahendus konstant bleibt, **c)** wenn der Minuendus konstant bleibt und der Subtrahendus um 1, 2, 3 usf. bis 10 zunimmt, **d)** wenn der Minuendus konstant bleibt und der Subtrahendus um 1, 2, 3 usf. bis 10 abnimmt?

81. a) In der Differenz $a - b = c$ wachsen Minuend und Subtrahend gleichzeitig um 1, 2, 3 usf. bis 10. Wie ändert sich die Differenz? **b)** In der Differenz $a - b = c$ nehmen Minuend und Subtrahend gleichzeitig um beliebige Werte ab. Wie ändert sich die Differenz? **c)** In der Differenz $a - b = c$ nimmt der Minuend um 1, 2, 3 usf. bis 10 zu, während gleichzeitig der Subtrahend jeweilig um

denselben Wert abnimmt. Wie ändert sich die Differenz? **d)** Wie ist die Änderung der Differenz, wenn der Minuend um 1, 2, 3 usf. bis 10 abnimmt, während gleichzeitig der Subtrahend jeweilig um denselben Wert zunimmt?

Gleichungen.

Bestimme in den folgenden Gleichungen die unbekannte Größe x:

82. $x - 9 = 10$. **83.** $8 + x = 11$.
84. $x - 9 = 1$. **85.** $x + 5 = 8$.
86. $x - 7 = 3$. **87.** $x - 53 = 37$.
88. $x - 17 = 23$. **89.** $27 - x = 16$.
90. $x + 8 = 9{,}6$. **91.** $2{,}8 = 5 - x$.
92. $x + 7{,}5 = 9{,}3$. **93.** $3{,}7 = 7{,}3 - x$.
94. $16{,}5 - x = 8{,}7$. **95.** $x - 5{,}7 = 2{,}8$.
96. $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. **97.** $\frac{1}{2} = \frac{3}{5} - x$.
98. $\frac{1}{12} = \frac{3}{4} - x$ **99.** $x + a = b$.
100. $x - a = b$. **101.** $b + x = a$.
102. $a = x - b$. **103.** $a - x = b$.
104. $a = b - x$.

Benütze folgende Angaben zur Aufstellung einer Gleichung und löse dann die Gleichung:

105. Welche Zahl muß man zu 739 addieren, um 937 zu erhalten?
106. Welche Zahl muß man von 847 subtrahieren, um 748 zu erhalten?
107. Zu welcher Zahl muß man 0,735 addieren, um 1 zu erhalten?
108. Von welcher Zahl muß man 7,667 subtrahieren, um 3,333 zu erhalten?
109. Welche Zahl gibt $\frac{3}{4}$, wenn sie um $\frac{1}{12}$ vermehrt wird?
110. Welche Zahl gibt $3\frac{5}{6}$, wenn man sie um $2\frac{2}{3}$ vermindert?
111. Um welche Zahl muß man b vermehren, um a zu erhalten?
112. Welche Zahl muß man von $a + 1$ subtrahieren, um 2 zu erhalten?
113. Von welcher Zahl muß man a subtrahieren, um b zu erhalten?

Fasse die folgenden Gleichungen in Worte:

114. $x - 5 = 6$. **115.** $x + 1\frac{1}{2} = 2$.
116. $13 + x = 43$. **117.** $x - 1\frac{1}{2} = 2$.
118. $9 = 15 - x$. **119.** $x - 2 = 3{,}2$.

Stelle bei der Beantwortung der in den nächsten Aufgaben gestellten Fragen erst die Gleichungen auf. Wenn sie gelöst sind, mache die Probe.

120. Der eine von zwei Nebenwinkeln ist 87°, wie groß ist der andere?

121. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der eine spitze Winkel 40°, wie groß ist der andere?

122. Der eine spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks nimmt nacheinander die Werte 41°, 42°, 43° usf. an. Welchen Wert hat jeweilig der andere Winkel?

123. Die Summe zweier Innenwinkel eines Dreiecks ist 112° 30′, wie groß ist der dritte Innenwinkel?

124. Ein Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist 30^0; wie groß ist der Winkel an der Spitze?

125. Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks nimmt nacheinander die Werte 31^0, 32^0, 33^0 usf. an. Welchen Wert hat jeweilig der Winkel an der Spitze?

126. Eine Erbschaft von 1430 ℳ soll so verteilt werden, daß die beiden älteren Söhne gleich viel, der jüngere 800 ℳ erhält. Wieviel erhalten die beiden älteren Söhne? Wieviel also jeder von ihnen?

§ 6. Addition und Subtraktion mehrgliedriger Ausdrücke.

Klammern.

Schreibe unter Benutzung von Klammern und berechne:

1. 5, vermehrt um die Summe von 17 und 12.
2. 212, vermehrt um die Summe von 187 und 101.
3. 17, vermindert um die Summe von 7 und 5.
4. 216, vermindert um die Summe von 90 und 103.
5. Die Summe von 12 und 112, vermehrt um 16.
6. Die Summe von 83 und 27, vermehrt um 40.
7. 17 vermindert um die Differenz von 7 und 5.
8. 216 vermindert um die Differenz von 103 und 96.
9. Die Summe von 18 und 17, vermindert um 20.
10. Die Summe von 103 und 104, vermindert um 199.
11. Die Differenz von 28 und 14, vermehrt um 22.
12. Die Differenz von 112 und 97, vermehrt um 111.
13. Die Differenz von 35 und 17, vermindert um 10.
14. Die Differenz von 205 und 107, vermindert um 57.
15. Zeige, daß

$$m + (a + b) = m + a + b$$

ist, für die folgenden Werte:

	a)	b)	c)	d)
$m =$	2;	5;	4;	2.
$a =$	3;	10;	$\frac{1}{2}$;	0,1.
$b =$	6;	13;	$\frac{1}{4}$;	0,8.

e) Für beliebige Strecken m, a und b auf der Zahlengeraden.

16. Fasse in Worte und berechne:
a) $313 + (195 + 87)$; b) $(217 + 18) + 32$; c) $(712 + 63) - 112$.

17. Rechne a) $289 + 111 = 289 + (11 + 100)$; ebenso b) $277 + 143$; c) $856 + 274$; d) $1396 + 254$.

18. Rechne a) $893 + 569 = 893 + (7 + 562)$; ebenso b) $1985 + 801$; c) $587 + 781$; d) $776 + 983$.

19. $7a + (3a + 2b)$. **20.** $12a + (4 + 8a)$.
21. $5x + (x + y)$. **22.** $(3p + 4q) + 5p$.
23. $3m + (2n + 7m)$. **24.** $(17u + 21v) + v$.

25. Zeige, daß
$$m + (a - b) = m + a - b$$
ist, für die Werte:

	a)	b)	c)	d)
$m =$	2;	5;	4;	2.
$a =$	4;	13;	$\frac{1}{2}$;	0,8.
$b =$	3;	10;	$\frac{1}{4}$;	0,1.

26. Zeige für beliebige Strecken m, a und b, wo a größer als b ist, die Gleichheit
$$m + (a - b) = m + a - b$$
auf der Zahlengeraden.

27. Fasse in Worte und berechne: **a)** $313 + (185 - 17)$; **b)** $(310 - 18) + 32$; **c)** $(518 - 63) - 119$.

28. Rechne **a)** $256 + 95 = 256 + (100 - 5)$; ebenso **b)** $325 + 88$; **c)** $1217 + 197$; **d)** $336 + 998$.

29. Rechne **a)** $288 + 65 = (300 - 12) + 65$; ebenso **b)** $497 + 87$; **c)** $985 + 123$; **d)** $575 + 650$.

30. $7a + (2a - 3b)$.

31. $9x + (3x - 5y)$.

32. $3x + (9y - 5x)$.

33. $(3x - b) + 5b$.

34. $(5x - 7a) + 4a$.

35. $(3x - 3y) - 5y$.

36. Zeige, daß
$$m - (a + b) = m - a - b$$
ist, für die Werte:

	a)	b)	c)	d)
$m =$	10;	25;	4;	2.
$a =$	3;	10;	$\frac{1}{2}$;	0,1.
$b =$	4;	13;	$\frac{1}{4}$;	0,8.

37. a—d) Zeige an denselben Werten wie in der vorangegangenen Aufgabe, daß
$$m - a + b \neq m - (a + b)$$
ist. **e)** In welchem Falle ist $m - a + b = m - (a + b)$?

38. Zeige für beliebige Zahlstrecken m, a und b, wobei jedoch m größer als $a + b$ gewählt ist, die Richtigkeit der Gleichung
$$m - (a + b) = m - a - b.$$

39. Fasse in Worte und berechne:
a) $383 - (183 + 17)$; **b)** $(218 - 38) + 42$; **c)** $(501 - 69) - 203$.

40. Rechne **a)** $186 - 47 = 186 - (40 + 7)$; ebenso **b)** $287 - 125$; **c)** $379 - 53$; **d)** $543 - 82$.

41. Rechne **a)** $383 - 189 = 383 - (183 + 6)$; ebenso **b)** $236 - 139$; **c)** $573 - 385$; **d)** $517 - 418$.

42. $7a - (2a + 3b)$.

43. $9x - (3x + 5y)$.

44. $121a - (45b + 27a)$.

45. $115x - (13y + 91x)$.

46. $187 - (4a + 37)$.

47. $110 - (10 + x)$.

48. Zeige, daß

$$m - (a - b) = m - a + b$$

ist, für die folgenden Werte:

	a)	b)	c)	d)
$m =$	10;	25;	4;	2.
$a =$	4;	13;	$\frac{1}{2}$;	0,8.
$b =$	3;	10;	$\frac{1}{4}$;	0,1.

49. **a—d)** Zeige an denselben Werten wie in der vorangegangenen Aufgabe, daß

$$m - a - b \neq m - (a - b)$$

ist. **e)** In welchem Falle ist

$$m - a - b = m - (a - b)?$$

50. Zeige für beliebige Zahlstrecken m, a und b, die jedoch so gewählt sind, daß a größer als b und m größer als $a - b$ ist, daß

$$m - (a - b) = m - a + b$$

ist.

51. Fasse in Worte und berechne: **a)** $1213 - (183 - 17)$, **b)** $365 - (388 - 97)$.

52. Rechne **a)** $783 - 98 = 783 - (100 - 2)$; ebenso **b)** $176 - 97$; **c)** $653 - 88$; **d)** $1246 - 199$.

53. Rechne **a)** $235 - 33 = 235 - (35 - 2)$; ebenso **b)** $543 - 141$; **c)** $988 - 282$; **d)** $1355 - 343$.

54. Rechne **a)** $388 + 595 = (400 - 12) + (600 - 5)$; ebenso **b)** $702 + 396$; **c)** $1413 - 509$; **d)** $1209 - 711$.

55. $5a - (3a - b)$.

56. $113a - (100a - 3b)$.

57. $7x - (5 - 3x)$.

58. $16m - (3n - 5m)$.

Löse in den folgenden Aufgaben die Klammern auf und führe dann die Rechnung so weit aus, als es möglich ist.

59. $7a - 9b + (a + b)$.
60. $15a - 7b - (7a - 5b)$.
61. $5a + (3a - 2b) + (a + 2b)$.
62. $(a + b - c) + (a - b + c)$.
63. $(a + b - c) - (a - b + c)$.
64. $(7a - 3b) - (5a + 3b) - (a - 5b)$.
65. $(8x - 5) + (3x - 7) - (9x - 11)$.
66. $12 - (5x - 6) + (3x + 1) - (x + 10)$.
67. $(6a - 3b + 7c) - (a - b + c) + (2a + b - 6c)$.
68. $(3m - 7n - 5p) + (2m + 4n - 3p) - (4m - 3n - 6p)$.
69. $(6x + 5y - 3z) - (5x - 3y + 2z) - (x + 7y - 4z)$.
70. $m + [(a - b) + (b + d)]$.
71. $m + [(b + c) - (m + d)]$.

72. $m - [(a - b) - (c - m)]$.
73. $m - [(x - y) - (a - m)]$.
74. $(7a - 2b) - [(3a - c) - (2b - 3c)]$.
75. $(3x + 5y) - [(7x - 3y) - (5x - 7y)] + (x - y)$.
76. $(8m - l) + 5p - [(3q + 4p - l) + 7m - (2q - p)]$.
77. $8\frac{1}{2}n - [3\frac{1}{3}p - (p - 5{,}5n)] - [5\frac{1}{6}p + (2n - 0{,}5p)]$.
78. $[2\frac{1}{4}x - (3\frac{1}{4}y + t)] - [(0{,}75x - 0{,}5y) + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - t)]$.
79. $[7{,}01p - (2{,}5r - 1{,}74)] - [(4\frac{1}{2}r - 0{,}79p) - 3{,}26] - 1\frac{1}{5}p$.

Beweise die folgenden Sätze und Formeln durch Rechnung:

80. a) Die Summe aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen gibt das Doppelte der ersten Zahl. Prüfe dies an den Zahlen b) 385 und 239; c) 7,25 und 6,937; d) 117 und 201; e) 0,48 und 2,22.

81. a) Die Differenz der Summe und der Differenz zweier Zahlen gibt das Doppelte der zweiten Zahl. Prüfe dies an den Zahlen b) 783 und 465; c) 97 und 83; d) 5,324 und 3,7; e) $5\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{4}$.

82. Stelle den Formeln

a) $a + b = (a + n) + (b - n)$;
b) $a + b = (a - n) + (b + n)$;
c) $a + b = (a + n) - (n - b)$;
d) $a + b = (b + n) - (n - a)$

entsprechend vier Umformungen von $a - b$ auf und beweise alle diese Formeln.

Löse folgende Gleichungen:

83. $24 - (x + 4) = 18$.
84. $26 - (x - 4) = 20$.
85. $55 = 25 + (x - 11)$.
86. $55 = 70 - (x - 5)$.
87. $3x - (2x - 5) = 15$.
88. $(4x - 4) - (3x - 3) = 1$.

§ 7. Multiplikation und Division eingliedriger Ausdrücke.

Multiplikation.

1. Schreibe in kürzerer Form:

a) $7 + 7 + 7 + 7 + 7$; b) $a + a + a + a + a + a + a$;
c) $(a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b)$;
d) $(x - 2y) + (x - 2y) + (x - 2y)$.

2. Stelle das Produkt $a \cdot b$ geometrisch durch ein Rechteck mit den Seiten a und b dar, wobei folgende Werte für a und b gewählt seien: a) 3 und 4; b) 7 und 13; c) 1 und 1; d) $\frac{1}{2}$ und 2; e) $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$; f) 0,4 und 0,7.

3. Zeige an den Wertepaaren der Aufgabe 2 die Richtigkeit von

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

4. Zeige, daß $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b$ ist an folgenden Werten für a, b und c: a) 2, 3 und 4; b) 10, 9 und 7; c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und 3; d) 5,1 und 0,1.

5. Erkläre, warum man a) $0 \cdot n = 0$; b) $m \cdot 0 = 0$ setzt.

6. Berechne möglichst praktisch

a) $8 \cdot 7 \cdot 25$; b) $6 \cdot 37 \cdot 5$; c) $7 \cdot 8 \cdot 15$;
d) $4 \cdot 47 \cdot 75$; e) $125 \cdot 9 \cdot 8$; f) $16 \cdot 19 \cdot 375$;
g) $37 \cdot 8 \cdot 3$; h) $4 \cdot 13 \cdot 625$; i) $5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$;
k) $5 \cdot 125 \cdot 4 \cdot 8$; l) $125 \cdot 75 \cdot 16 \cdot 4$; m) $625 \cdot 75 \cdot 8 \cdot 4$.

7. Rechne a) $45 \cdot 36 = 45 \cdot 4 \cdot 9$; ebenso

b) $95 \cdot 48$; c) $825 \cdot 24$;
d) $125 \cdot 28$; e) $375 \cdot 32$.

8. Bringe auf die einfachste Form:

a) $2a \cdot 5b$; b) $6x \cdot 7y$; c) $9m \cdot 7p$;
d) $4b \cdot 3{,}75$; e) $6c \cdot 13{,}5$; f) $5x \cdot 18y$;
g) $15a \cdot 3b \cdot \frac{1}{5}c$; h) $2x \cdot 0{,}5y \cdot 3$; i) $\frac{1}{2}u \cdot \frac{1}{3}v \cdot \frac{1}{4}w$.

Division.

Führe folgende Divisionen aus und füge dabei jedesmal die Probe hinzu:

9. a) $36ab : 9$; b) $39a : 13$; c) $54xy : 18$.
10. a) $7\frac{1}{2}a : 3$; b) $\frac{3}{4}b : 5$; c) $\frac{1}{2}a : 2$.
11. a) $\frac{4}{5}x : 2$; b) $\frac{8}{9}y : 4$; c) $\frac{6}{11}c : 3$.
12. a) $2a : \frac{1}{2}$; b) $3x : \frac{3}{2}$; c) $6b : \frac{2}{3}$
13. a) $8y : \frac{4}{5}$; b) $7c : 1\frac{2}{5}$; c) $5b : 1\frac{1}{4}$.
14. a) $30ax : 5a$; b) $50np : 2p$; c) $105xy : 3y$.
15. a) $3a : 2a$; b) $3\frac{1}{5}b : 4b$; c) $8\frac{1}{4}x : 3x$.
16. a) $39abcx : 13acx$; b) $76abxy : 19aby$; c) $84a \cdot a \cdot n \cdot x : 7ax$.
17. a) $1\frac{1}{2}ab : 2\frac{1}{4}a$; b) $3\frac{1}{3}ax : 2\frac{1}{2}x$; c) $3\frac{3}{4}xy : 1\frac{2}{3}y$.
18. a) $8\frac{1}{3}ay : 1\frac{2}{3}a$; b) $\frac{2}{3}ab : \frac{3}{2}b$; c) $5nx : 15n$.

Multiplikation und Division.

19. Zeige an folgenden Wertepaaren a und b, daß $(a : b) \cdot c = a \cdot c : b$ und daß $a \cdot (b : c) = ab : c$ ist: a) 21, 3 und 5, b) 7, 6 und 3, c) 15, 2 und 5.

20. Rechne a) $17 \cdot 25 = 17 \cdot (100 : 4)$; ebenso b) $12 \cdot 25$; c) $15 \cdot 75$; d) $24 \cdot 125$; e) $32 \cdot 625$; f) $16 \cdot 375$; g) $48 \cdot 250$; h) $40 \cdot 875$.

21. Rechne a) $1700 : 25 = 17 \cdot 100 : 25$, ebenso b) $1200 : 75$; c) $1400 : 25$; d) $5000 : 125$; e) $24000 : 625$.

22. $\frac{2}{3}abx \cdot \frac{3}{4}cy : \frac{1}{2}by$. **23.** $\frac{1}{2}abc \cdot \frac{3}{5}xy : 1\frac{1}{5}bcy$.

24. $1\frac{1}{2}abn \cdot 2\frac{1}{3}xy : 1\frac{1}{6}bnx$. **25.** $3\frac{1}{2}axy \cdot 1\frac{1}{3}by : 2\frac{1}{3}ax$.

26. In dem Produkt $ab = 120$ durchläuft a) der Faktor a, b) der Faktor b die Zahlen 1, 2, 3 usf. bis 120. Welche Zahlen muß jeweilig der andere Faktor durchlaufen?

27. In dem Produkt $ab = 120$ wird ein Faktor a) mit 2, 3 usf. bis 10 multipliziert, b) durch 2, 3 usf. bis 10 dividiert, der andere Faktor bleibt konstant. Wie ändert sich das Produkt?

28. In dem Produkt $ab = c$ werden beide Faktoren gleichzeitig **a)** mit 2, 3 usf. bis 10 multipliziert, **b)** durch 2, 3 usf. bis 10 dividiert. Wie ändert sich das Produkt? **c)** Wie ändert sich das Produkt, wenn der eine Faktor mit 2, 3 usf. bis 10 multipliziert, der andere jeweilig durch dieselbe Zahl dividiert wird?

29. In dem Quotienten $a : b = 12$ durchläuft **a)** der Dividendus a, **b)** der Divisor b die Zahlen 1, 2, 3 usf. bis 12. Welche Zahlen muß im Falle a) der Divisor, im Falle b) der Dividendus durchlaufen?

30. In dem Quotienten $a : b = 15{,}2$ wird **a)** der Dividendus mit 2, 3 usf. bis 10 multipliziert; wie ändert sich bei konstantem b der Quotient, **b)** bei konstantem Quotienten der Divisor? **c) d)** Wie sind die Änderungen, wenn der Dividendus durch 2, 3 usf. bis 10 geteilt wird?

31. In dem Quotienten $a : b = c$ wird der Divisor mit 2, 3 usf. bis 10 multipliziert, wie ändert sich **a)** bei konstantem a der Quotient, **b)** bei konstantem c der Dividendus? **c) d)** Wie sind die Änderungen, wenn der Divisor durch 2, 3 usf. bis 10 geteilt wird?

32. Wie ändert sich der Quotient $a : b = c$, wenn **a)** Dividendus und Divisor mit der gleichen Zahl multipliziert, **b)** durch die gleiche Zahl dividiert werden? **c)** Wie ändert sich der Quotient, wenn a mit 2, 3 usf. bis 10 multipliziert und b gleichzeitig durch dieselbe Zahl dividiert wird? **d)** Wie ändert sich der Quotient, wenn a durch 2, 3 usf. bis 10 dividiert und b gleichzeitig mit derselben Zahl multipliziert wird?

Gleichungen.

Löse folgende Gleichungen:

33. $5x = 15$. **34.** $28x = 7$.
35. $3x = 24$. **36.** $56x = 8$.
37. $5x = 3{,}5$. **38.** $8x = 3$.
39. $7x = 8\frac{2}{5}$. **40.** $9x = 11\frac{1}{4}$.
41. $x : 5 = 8$. **42.** $x : 8 = 0$.
43. $7 = x : 3$. **44.** $x : 9 = 0$.
45. $x : 0{,}25 = 8$. **46.** $x : 0{,}5 = 6$.
47. $9 = 0{,}3 : x$. **48.** $x : 16 = 0{,}375$.
49. $x : 0{,}8 = 86{,}25$. **50.** $x : \frac{2}{3} = 6$.
51. $6 = \frac{2}{3} : x$. **52.** $x : 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{3}$.
53. $x : \frac{5}{8} = 16$. **54.** $7x - 5 = 9$.
55. $9x + 4 = 31$. **56.** $5x - 16 = 9$.
57. $8x + 1 = 17$. **58.** $25 = 29 - 4x$.
59. $19 = 100 - 9x$. **60.** $5x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
61. $\frac{1}{20} = \frac{3}{4} - 7x$. **62.** $x : 8 + 3 = 8$.
63. $5 - x : 7 = 4$. **64.** $x : 0{,}3 - 9 = 1$.
65. $2 = 7 - x : 0{,}4$.

66. Welche Zahl muß man mit 7 multiplizieren, um 1001 zu erhalten?

67. Welche Zahl muß man durch 27 dividieren, um 37 zu erhalten?

68. Mit welcher Zahl muß man 30,03 multiplizieren, um 111,111 zu erhalten?

69. Durch welche Zahl muß man 70,07 dividieren, um 7,7 zu erhalten?

70. Mit welcher Zahl muß man $\frac{5}{4}$ multiplizieren, um den Bruch $\frac{4}{5}$ zu erhalten?

71. Wie heißt der Dividendus, wenn der Divisor $\frac{7}{8}$, der Quotient $\frac{8}{7}$ ist?

Fasse die folgenden Gleichungen in Worte und löse sie:

72. $8x = 56$. **73.** $x : 4 = 16$.

74. $x : \frac{1}{3} = 2$. **75.** $3 = 12 : x$.

76. $16 - 3x = 4$. **77.** $0{,}5 = 8 : x$.

78. Aus Schwenters Erquickstunden (1636); wie man eine Zahl errät:

Laß sie mit 3 multiplicirn das Product halbirn | das halb mit 6 multiplicirn | heiß dir das Product sagen | dividier mit 9 | so findet sich ein quotient der begerten Zahl gleich.

§ 8. Multiplikation und Division mehrgliedriger Ausdrücke.

Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom.

Schreibe unter Benutzung von Klammern und berechne:

1. Die Summe von 17 und 16, multipliziert mit 3.

2. Das Produkt aus der Summe von 151 und 149 und dem Bruch $\frac{1}{3}$.

3. 8, multipliziert mit der Differenz von 16 und 5.

4. Das 18fache der Differenz von 813 und 746.

5. Zeige an den folgenden Werten, daß

$$(a + b)\,m = am + bm$$

ist: **a)** $a = 5$, $b = 3$, $m = 7$; **b)** $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $m = 4$; **c)** $a = 0{,}8$, $b = 0{,}5$, $m = 1{,}6$. — Beseitige die Klammern in

d) $(n + 1)\,n$; **e)** $m\,(m + n)$; **f)** $(2a + 3b)\,c$.

6. a—c) Stelle das Produkt $(a + b)m$ geometrisch durch ein Rechteck dar und zeige, daß dieses Rechteck gleich der Summe der Rechtecke ist, die am und bm darstellen. Benutze dazu die in Aufgabe 5 angegebenen Werte.

7. a—c) Zeige an den in Aufgabe 5 a—c) angegebenen Werten, daß

$$(a - b)\,m = am - bm$$

ist. — Beseitige die Klammern in

d) $(n - 1)\,n$; **e)** $a(b - a)$; **f)** $(7m - 2n)a$.

8. a—c) Stelle das Produkt $(a - b)m$ geometrisch durch ein Rechteck dar und zeige, daß dieses Rechteck gleich der Differenz der Rechtecke ist, die am und bm darstellen. Benutze dabei die Werte der Aufgabe 5.

9. a—c) Zeige an den Werten der Aufgabe 5 für a, b und m, daß folgende Gleichungen gelten:

$$n - (a + b)m = n - (am + bm) = n - am - bm.$$
$$n - (a - b)m = n - (am - bm) = n - am + bm.$$

Bringe auf möglichst einfache Form die Ausdrücke:

10. $3(a + b) + 4(a - b)$. **11.** $7(2a - 3b) + 3(2a + 7b)$.
12. $2(x - 2y) + 3(x - 3y)$. **13.** $12(2m + 3n) - 6(4m - 6n)$.
14. $3(a + b) + 5(a - b) - 6(a + b) - (a - 7b)$.
15. $2(x - y) - 3(x + y) - 7(x - y) + 8(x + y)$.
16. $(a - b + c) \cdot 5$. **17.** $(3a + 5b - 7c) \cdot 6$.
18. $7(2a - 3b + 8)$. **19.** $8(a - 7b + 5c)$.
20. $(3a - 4b + 5c) \cdot 2x$. **21.** $3(5n - 3p - 7q) \cdot y$.
22. $3(2a - 6b - 5c) - 2(a - 5b - 8c) - 4(a - 2b)$.
23. $5a(3a - 2b - 2c) + 2b(5a - 3b + 5c) + 10c(a - b)$.
24. Berechne und fasse das Ergebnis in Worte:
a) $\frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)$; **b)** $\frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y)$.
25. Welche Werte nehmen die Brüche

a) $\frac{1}{n(n+2)}$; b) $\frac{2n+1}{n(n+1)}$; c) $\frac{n}{n(n-1)+1}$

an, wenn n die ganzzahligen Werte 1 bis 10 durchläuft?

Multiplikation von Polynomen.

Schreibe (wenn nötig unter Benutzung von Klammern) und berechne:

26. Das Produkt aus der Summe von 17 und 18 und der Summe von 18 und 19.

27. Die Summe von 7 und 14, multipliziert mit der Differenz von 28 und 16.

28. Das Produkt aus der Summe und der Differenz der Zahlen 16 und 13.

29. Das Produkt aus der Differenz von 36 und 13 und der Differenz von 26 und 13.

30. **a)** Die Summe der Quadrate, **b)** das Quadrat der Summe, **c)** die Differenz der Quadrate, **d)** das Quadrat der Differenz der beiden Zahlen 25 und 15.

31. Zeige, daß

$$(a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$$

ist, und mache die Probe für:

a) $a = 5$, $b = 2$, $x = 4$, $y = 3$;
b) $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$;
c) $a = 1{,}2$, $b = 0{,}4$, $x = 0{,}8$ $y = 0{,}2$.

d—f) Stelle das Produkt $(a + b)(x + y)$ für die angegebenen Werte durch Rechtecke geometrisch dar.

32. Zeige an den in Aufgabe 31 genannten Werten, daß

a—c) $(a + b)(x - y) = ax + bx - ay - by$,
d—f) $(a - b)(x + y) = ax - bx + ay - by$,
g—i) $(a - b)(x - y) = ax - bx - ay + by$

ist.

33. a) Leite die Formel
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
ab. **b)** Vergleiche die Regel mit der geometrischen Darstellung des Produktes durch ein Quadrat.

Berechne mit Benutzung der eben erhaltenen Regel:

34. a) 22^2, **b)** 41^2. **35. a)** 51^2, **b)** 53^2. **36. a)** 104^2, **b)** 121^2
37. a) 1010^2, **b)** 2115^2. **38. a)** 31^2, **b)** 131^2. **39.** $(x + 3)^2$.
40. $(7x + 5)^2$ **41.** $(3a + 2b)^2$. **42.** $(n + 1)^2$

43. a) Leite die Formel
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
ab. **b)** Vergleiche die Regel, die du dabei erhältst, mit der geometrischen Darstellung des Produktes durch ein Quadrat.

Berechne mit Benutzung der eben abgeleiteten Regel:

44. a) 18^2, **b)** 19^2. **45. a)** 48^2, **b)** 69^2. **46. a)** 99^2, **b)** 197^2.
47. a) 998^2, **b)** 1990^2. **48. a)** 45^2, **b)** 145^2. **49.** $(x - 7)^2$.
50. $(3a - 4)^2$. **51.** $(6x - 5y)^2$. **52.** $(n - 1)^2$.

53. a) Leite die Formel
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$
ab. **b)** Vergleiche die Regel, die du dabei erhältst, mit der geometrischen Darstellung des Produktes durch ein Rechteck; **c)** berechne $(1 + z) \cdot (1 - z)$ und setze dann z gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.

Berechne mit Benutzung dieser Regel:

54. a) $18 \cdot 22$, **b)** $27 \cdot 33$. **55. a)** $101 \cdot 99$, **b)** $203 \cdot 197$.
56. a) $53 \cdot 47$, **b)** $153 \cdot 147$. **57. a)** $1010 \cdot 990$, **b)** $4020 \cdot 3980$.
58. $(n + 1) \cdot (n - 1)$. **59.** $(x - 9) \cdot (x + 9)$.
60. $(3a - 5) \cdot (3a + 5)$. **61.** $(2a + b) \cdot (2a - b)$.
62. $(7x + 3y) \cdot (7x - 3y)$. **63.** $(4u - 3v) \cdot (4u + 3v)$.
64. $28^2 - 12^2$. **65.** $37^2 - 23^2$.
66. $96^2 - 56^2$. **67.** $823^2 - 73^2$.
68. $529^2 - 91^2$. **69.** $587^2 - 575^2$.

Berechne die folgenden Produkte:

70. $(7x - 3)(5x - 4)$. **71.** $(3x - 2)(2x + 3)$.
72. $(7a - 5b)(6a + 5b)$. **73.** $(8x - 7y)(7x + 6y)$.
74. $(3{,}2a - 5b)(5a - 2{,}8b)$. **75.** $(2{,}6x + 0{,}3y)(5x + 0{,}7y)$.
76. $(3{,}5x + 0{,}2)(8{,}4x - 0{,}3)$. **77.** $(7{,}25 + 4x)(2{,}8 - 3{,}6x)$.
78. $(3y + 2)(4{,}8y - 1{,}5)$. **79.** $(7a - 0{,}3)(2{,}8a - 5)$.
80. $(a + b + c)(a + b - c)$. **81.** $(a + b - c)(a - b + c)$.
82. $(3a + b - x)^2$. **83.** $(2a - 3b + x)^2$.
84. $(3x - 5y - 2)^2$. **85.** $(a^2 - 2ab + b^2)(a + b)$.
86. $(a^2 + 2ab + b^2)(a - b)$. **87.** $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$.
88. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$. **89.** $(a + b)(a + b)(a + b)$.
90. $(a - b)(a - b)(a - b)$. **91.** $(x + 1)^3$.

92. $(1 - y)^3$. **93.** $(2a - b)^3$.
94. $(3x - 4y)^3$. **95.** $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
96. $(x - a)(x - b)(x - c)$. **97.** $(2x - 3)(3x + 7)(6x - 5)$.
98. $(3x + 5)(7x + 5)(2x - 1)$.
99. $(3a + 2b)(a - b) + (4a - 5b)(2a + 3b)$.
100. $(u + v)(2v - u) + (u - v)(v + 2u)$.

Anwendungen.

101. In einem Produkt $a \cdot b = c$ wird **a)** der Faktor a, **b)** der Faktor b um 1, 2, 3 usf. bis 5 vermehrt. Wie ändert sich das Produkt? **c)** Wie ist die Änderung des Produktes, wenn der Faktor a um 1, 2, 3 usf. bis 5 verringert wird?

102. In einem Produkt $a \cdot b = c$ werden **a)** beide Faktoren um 1, 2, 3 usf. bis 10 vermehrt, **b)** beide Faktoren um 1, 2, 3 usf. bis 10 vermindert, **c)** der Faktor a um 1, 2, 3 usf. bis 10 vermehrt und gleichzeitig der Faktor b jeweilig um den gleichen Wert vermindert. Wie ändert sich das Produkt?

103. Um wieviel wird das Produkt $739 \cdot 571$ größer, wenn man jeden Faktor um 1 vermehrt?

104. Um wieviel wird das Produkt $639 \cdot 471$ größer, wenn man den Faktor 639 um 1 vermindert und 471 um 1 vermehrt?

105. Um wieviel wird das Produkt $549 \cdot 331$ kleiner, wenn man jeden Faktor um 1 vermindert?

106. Um wieviel wird ein Rechteck größer, dessen Seiten 793 m und 137 m lang sind, wenn man die lange Seite um 5 m, die kurze um 7 m verlängert?

107. Die Seite eines Buches hat durchschnittlich 38 Zeilen zu 47 Buchstaben. Wieviel Buchstaben würde die Seite mehr enthalten, wenn auf jeder Seite 1 Zeile weniger, in jeder Zeile aber 2 Buchstaben mehr ständen?

108. Welche Werte nehmen die Brüche **a)** $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$; **b)** $\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}$ an, wenn n die ganzzahligen Werte 1 bis 10 durchläuft?

109. Berechne $(a + b)$, $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ usf. bis $(a + b)^{10}$ und stelle die dabei auftretenden Koeffizienten in einer (Pascalschen) Tafel dar, die so beginnt:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

110. Berechne **a)** $(a+b+c)^2$, **b)** $(a+b+c+d)^2$, **c)** $(a+b+c+d+e)^2$ und gib geometrische Darstellungen des Ergebnisses durch Quadrate.

111. Zeige, daß

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$

ist. Stelle eine Tabelle von (pythagoreischen) Zahlen $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$ zusammen, indem du a und b die Werte von 1 bis 5 durchlaufen läßt, wobei aber nur die Werte $a > b$ zu berücksichtigen sind.

112. Zeige die Richtigkeit der folgenden Formeln:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c + 2d)^2 = (a + d)^2 + (b + d)^2 + (c + d)^2 + (a + b + c + d)^2$,

b) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(a+c)(b+c)$.

c) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2$
$= (bz-yc)^2 + (cx-az)^2 + (ay-xb)^2$.

113. Um das Quadrat einer zweistelligen mit 5 endenden Zahl zu bilden, benutzt man die Formel:

$$(a+5)^2 = a(a+10) + 25.$$

a) Fasse die Regel in Worte; **b)** beweise sie; berechne danach **c)** 65^2; **d)** 85^2; **e)** 35^2.

114. In entsprechender Weise wird

$$(a+\tfrac{1}{2})^2 = a(a+1) + \tfrac{1}{4}.$$

a) Fasse die Regel in Worte; **b)** beweise sie; berechne **c)** $(2\frac{1}{2})^2$; **d)** $(10\frac{1}{2})^2$; **e)** $(49\frac{1}{2})^2$.

115. Wenn man zwei zweiziffrige Zahlen mit gleicher Einerziffer und mit Zehnerziffern, die sich zu 10 ergänzen, miteinander multiplizieren will, so ist folgende Rechenregel anwendbar:

$$(10a+b)\cdot(10c+b) = (ac+b)100 + b^2.$$

a) Fasse die Regel in Worte; **b)** beweise sie; berechne nach dieser Regel **c)** $32\cdot 72$; **d)** $43\cdot 63$; **e)** $91\cdot 11$.

116. Für das Produkt zweier zweiziffriger Zahlen, die sich nur durch die Reihenfolge der Ziffern unterscheiden, ist die Rechenregel anwendbar:

$$(10a+b)\cdot(10b+a) = 101ab + 10(a^2+b^2).$$

a) Fasse die Regel in Worte; **b)** beweise sie; berechne nach dieser Regel **c)** $43\cdot 34$; **d)** $87\cdot 78$; **e)** $49\cdot 94$.

117. Sind bei den beiden zweiziffrigen Faktoren eines Produktes die Zehner gleich und ergänzen sich die Einer zu 10, so ist eine Rechenregel anwendbar. Man rechnet z. B.:

$$23\cdot 27 = 20\cdot 30 + 3\cdot 7.$$

a) Leite die allgemeine Regel ab; **b)** fasse sie in Worte; berechne nach dieser Regel **c)** $31\cdot 39$; **d)** $44\cdot 46$; **e)** $55\cdot 55$.

118. Bei den Kurden in Persien, in der Walachei, nach manchen Angaben auch beim gemeinen Volk in Italien, Sponien und Südfrankreich, ist folgende Art des Fingerrechnens gebräuchlich, das die Multiplikation von Zahlen zwischen 5 und 10 auf eine solche von Zahlen kleiner als 5 zurückführt. Ist etwa $6\cdot 8$ zu bilden, so strecken sie an jeder Hand so viel Finger aus, als der Überschuß der Faktoren über 5 beträgt, hier also an der einen Hand einen, an der anderen drei Finger. Die Summe der erhobenen Finger gibt die Zehner (hier also $3+1=4$), das Produkt der nicht erhobenen Finger (hier also $4\cdot 2 = 8$) liefert die Einer. Beweise die Richtigkeit der Methode mit allgemeinen Zahlen a und b.

119. Schon bei Leonardo Pisano (1202) findet sich folgende Anweisung: Unter einer Anzahl von Personen — es seien weniger als 10 — hat einer einen Ring am Finger. Um die Person, den Finger und das Glied zu erraten, setzt man

zunächst die Reihenfolge der Personen fest, dann die Reihenfolge der Finger — etwa vom Daumen der linken Hand beginnend — schließlich die Reihenfolge der Fingerglieder — etwa das Nagelglied das erste. Jetzt ist die Zahl der Person, die den Ring trägt, zu verdoppeln, 5 zu addieren, das Ergebnis mit 5 zu multiplizieren, dann die Zahl des Fingers zu addieren, an dem der Ring steckt. Das Ergebnis ist mit 10 zu multiplizieren, die Zahl des Gliedes ist zu addieren und schließlich ist 250 zu subtrahieren. Das Ergebnis wird eine 3=stellige Zahl sein, deren erste Ziffer die Zahl der Person, deren zweite die Zahl des Fingers, deren dritte die Zahl des Gliedes angibt. **a)** Warum? **b)** Wie ist es, wenn mehr als 9 Personen vorhanden sind? **c)** Steckt der Ring am 10. Finger, so ist die Auslegung des Schlußergebnisses ein wenig zu ändern. Wie?

Verwandlung von Polynomen in Produkte.

Die folgenden Summen und Differenzen sind in Produkte zu verwandeln (bei jeder Aufgabe ist die Probe zu machen):

120. **a)** $7a + 7b$, **b)** $3x - 3y$, **c)** $ab + ax$, **d)** $nx - px$.

121. **a)** $18a - 24b$, **b)** $20x + 30y$, **c)** $6ax - 9bx$, **d)** $4ab - 6bc$.

122. **a)** $12a^2 - 9ab$, **b)** $8ax + 20x^2$, **c)** $25ab - 5b^2$, **d)** $18ap - 6p^2$.

123. **a)** $ab + b$, **b)** $ax - x$, **c)** $7x - 7$, **d)** $5 - 5y$.

124. **a)** $aa - a$, **b)** $xx + x$, **c)** $5xy - 4y$, **d)** $3a - 6ab$.

125. **a)** $a + a^2$, **b)** $a^3 + a^2$, **c)** $3x - 5x^2$, **d)** $2y^3 - 4y^5$

126. **a)** $ax - bx + cx$, **b)** $2ay + 3by - cy$.

127. **a)** $6ax - 8aa + 10ab$, **b)** $15ab - 25bb + 30bc$.

128. **a)** $35ac - 49bc + 21cc$, **b)** $36ax - 54bx - 9x$.

129. **a)** $20a^2 - 35ab - 45ac$, **b)** $51ay - 68xy + 85y^2$.

130. **a)** $aa - ab - ac + ad$, **b)** $nx - px + xy - xz$.

131. **a)** $a(n + p) - b(n + p)$, **b)** $(a - b)x - (a - b)y$.

132. **a)** $a(x - 1) + b(x - 1)$, **b)** $3a(x - y) - 5b(x - y)$.

133. **a)** $2a(3b - 2) - x(3b - 2)$, **b)** $5a(p - q) - 7b(p - q)$.

134. **a)** $(a + b)x - (a + b)$, **b)** $a(x - y) - (x - y)$.

135. **a)** $a(x + y) + (x + y)$, **b)** $(a - b)p - a + b$.

136. **a)** $(3a + b)x - 3a - b$, **b)** $a(2x - 5y) - 2x + 5y$.

137. **a)** $ac + ad + bc + bd$, **b)** $ax - ay + bx - by$.

138. **a)** $ax + ay - bx - by$, **b)** $ax - 2a - bx + 2b$.

139. **a)** $ab + ay - xy - bx$, **b)** $ax - 2b - a + 2bx$.

140. **a)** $ab + 3a - 2b - 6$, **b)** $2ab - 10a + 3b - 15$.

141. $6ax - 4ay - 9bx + 6by$.

142. $10ac - 15ad - 2bc + 3bd$.

143. $40ax + 63by - 45ay - 56bx$.

144. $20ab + 24cd - 32ad - 15bc$.
145. $40ab + 20xy - 25bx - 32ay$.
146. $45ab + 63xy - 81ax - 35by$.
147. $35a^2 + 30xy - 42ax - 25ay$.
148. $9ab + 20x^2 - 12ax - 15bx$.
149. a) $ab - ax + b - x$, b) $ax - a + bx - b$.
150. a) $ab + x - bx - a$, b) $3ax + 2b - 2bx - 3a$.
151. a) $ax + 2 - 2x - a$, b) $xy - x - y + 1$.
152. $ax + bx - cx - ay - by + cy$.
153. $ax - bx - ay + by + az - bz$.
154. $6ax - 4ay - 9bx + 6by + 15cx - 10cy$.
155. $8ax - 10bx - 20ay + 25by + 12az - 15bz$.
156. $(a - b)(3x - 2y) + (a - b)(4x + 7y)$.
157. $(a + b)(5x + 3y) - (a + b)(4x + 2y)$.

Substitutionen.

Setze in den folgenden Ausdrücken **a)** $2y$, **b)** $y - 3$, **c)** $y + z$, **d)** $y - z$ in die Stelle von x:

158. $x - 5$. **159.** $x^2 - 6$. **160.** $10 - x$.
161. $19 - 2x$. **162.** $x^2 + 2x - 4$. **163.** $x^2 - 3x + 2$.

Setze in den folgenden Ausdrücken $x = a + b$, $y = a - b$:

164. $3x - xy + y$. **165.** $3x - y(x + 1)$.
166. $2x(3 - y) - 2y$. **167.** $\frac{1}{2}x(x - y) - \frac{1}{2}y(x + y)$.

Substituiere in

168. $x^2 + 2x - 4$ den Wert $x = y - 1$
169. $x^2 + 6x - 16$ den Wert $x = y - 3$.
170. $x^2 + x - 12$ den Wert $x = y - \frac{1}{2}$.
171. $x^2 + ax + b$ den Wert $x = y - \frac{1}{2}a$.
172. $x^3 + 3x^2 - 4$ den Wert $x = y - 1$.

Gleichungen.

Löse die folgenden Gleichungen:

173. $7(x - 1) = 35$. **174.** $9 = (18 - x) \cdot 0{,}5$
175. $15 = 0{,}3 \cdot (27 + x)$. **176.** $a(x + b) = 2ab$.
177. $3(x - 1) = 2(x + 1)$. **178.** $5(5 - x) = 3(x - 3)$.
179. $(3x + 8)(x - 2) = (x + 4)(3x - 7)$.
180. $(27 - x)(6x - 5) = (2x + 11)(5 - 3x)$.

Division eines Polynoms durch ein Monom.[1])

181. Zeige an den folgenden Werten, daß

$$(a + b) : m = a : m + b : m$$

ist:

a) $a = 20,\quad b = 15,\quad m = 5,$
b) $a = 7,\quad b = 3,\quad m = 3,$
c) $a = 81,\quad b = 72,\quad m = 9,$
d) $a = 0{,}8,\quad b = 0{,}6,\quad m = 7.$

182. a—d) Zeige an den gleichen Werten wie in Aufgabe 181, daß

$$(a - b) : m = a : m - b : m$$

ist.

Führe folgende Divisionen aus:

183. $(5a + 5b - 5c) : 5.$

184. $(ax - bx + cx) : x.$

185. $(8a - 6b + 10c) : 2.$

186. $(ax^2 + bx - 5x) : x.$

187. $(6ax - 9bx - 15x) : 3x.$

188. $(8a^2 - 4ac + 12a) : 4a.$

189. $(49an - 21n^2 - 91np) : 7n.$

190. $(12a^2x - 8abx + 20axy) : 1\frac{1}{3}a.$

191. $(\frac{3}{4}axy - \frac{2}{5}bxy + \frac{7}{10}cxy) : \frac{1}{20}xy.$

192. $(2\frac{1}{2}abx - 3\frac{1}{3}bcy + 3\frac{3}{4}bd) : \frac{5}{4}b.$

193. Aus Schwenters Erquickstunden (1636); wie man eine gedachte Zahl findet:

Heiß die Zahl duplirn | vnd nach belieben eine gerade Zahl als 2, 4, 6, 8, 12 dazu addirn | laß halbirn vnd mit 4 multiplicirn | vnd 2 mal so viel als addiert worden | subtrahirn | heiß dir endlich die Zahl sagen | dividier sie mit 4. So bekommest du die in Sinn genommene Zahl.

194. Um eine gedachte Zahl zu erraten, wird folgende Regel angegeben: Denke dir eine Zahl. Nimm sie noch einmal. Zähle 4 dazu. Nimm davon die Hälfte. Zähle 7 hinzu. Multipliziere das Ergebnis mit 8. Subtrahiere dann 12. Dividiere durch 4. Ziehe schließlich 11 davon ab und sage mir die Zahl. Aus der angesagten Zahl kann man dann sofort die erst gedachte Zahl finden. Wie?

195. Ein Knabe sagt zum andern: Denke dir eine ganz beliebige Zahl. Addiere dazu 11. Multipliziere das Ergebnis mit 2. Subtrahiere jetzt 20. Multipliziere den Rest mit 5 und subtrahiere davon das Zehnfache der gedachten Zahl. Dann bekommst du 10 heraus. Wie konnte der Knabe das wissen?

196. Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn der Unterschied zwischen dem Doppelten der Endziffer und dem übrigen Teil der Zahl durch 7 teilbar ist. Beweise das und gib Beispiele.

---

1) Die Division eines Polynoms durch ein anderes Polynom gehörte gleichfalls hierher; die Aufgaben folgen aber erst in einem späteren Abschnitt (§ 11 Aufgabe 65 bis 104).

Drittes Kapitel.

Die vier Grundrechenarten mit relativen Zahlen.

§ 9. Einführung negativer Zahlen.

1. a) Bezeichne auf der Zahlengeraden die Punkte $+4$, $+2$, $+1$, 0, -3, -7, -12, $-a$, wenn a gegeben ist. b) Gib auf der Zahlengeraden die beiden Punkte an, deren absoluter Wert 5, 10, n (gleich einer gegebenen Strecke) ist.

2. Wie heißt von -8 aus a) die nächsthöhere ganze Zahl, b) die nächstniedrige ganze Zahl?

3. Welche ganze Zahl folgt auf die ganze Zahl $-n$, und welche geht ihr unmittelbar voraus?

4. Welche Strecke liegt zwischen a) -3 und $+10$, b) -10 und $+3$, c) $+3$ und -3, d) -5 und -1, e) -5 und -14?

5. Das Thermometer zeigt an einem Wintertage im Zimmer 17^0 C; es wird ins Freie gebracht und zeigt nun -5^0 C. Um wieviel Grad ist es gefallen?

6. Ein Thermometer, das als Zimmertemperatur 16^0 C zeigt, wird in eine Kältemischung aus Schnee und Salz getaucht. Jetzt zeigt es -13^0 C. Um wieviel Grad ist es gefallen?

7. An einem Wintertage ergibt die Temperaturablesung um 8 Uhr morgens -5^0, um 10 Uhr -2^0, um 12 Uhr 3^0, um 2 Uhr 4^0, um 4 Uhr 2^0, um 6 Uhr -1^0, um 8 Uhr -3^0, um 10 Uhr -4^0. Wie groß ist der relative und der absolute Temperaturunterschied bei den einzelnen Beobachtungen a) von der 8-Uhr- (vorm.) Ablesung, b) von der 10-Uhr- (vorm.), c) von der 12-Uhr-, d) von der 2-Uhr-, e) von der 4-Uhr-, f) von der 6-Uhr-, g) von der 8-Uhr-, h) von der 10-Uhr-Ablesung? Benutze eine Darstellung auf der Zahlengeraden!

8. Über den Temperaturverlauf bei einer Ballonfahrt ist in einem Fahrtbericht folgende Angabe gemacht: bei der Abfahrt zeigte das Thermometer 15^0. Es fiel allmählich um 26^0, stieg von da wieder um 7^0, fiel weiter um 12^0 und stieg dann bis zur Landung wieder um 24^0. Welches sind die wirklichen Temperaturen? Gib eine Darstellung auf der Zahlengeraden!

9. Auf der Eisenbahnstrecke Berlin—Eisenach liegt Halle bei 162 km, Weimar bei 246 km, Erfurt bei 270 km, Gotha bei 298 km, Eisenach bei 327 km. — Auf der Strecke Berlin—Königsberg i. Pr. liegt Küstrin bei 86 km, Landsberg a. W. bei 129 km, Schneidemühl bei 247 km, Dirschau bei 427 km, Königsberg i. Pr. bei 590 km. a) Gib auf Grund dieser Kilometerzahlen eine graphische Darstellung der Strecke Eisenach—Königsberg i. Pr. Wieviel Kilometer fährt man von b) Gotha nach Halle, c) Landsberg a. W. nach Dirschau, d) Weimar nach Küstrin, e) Halle nach Schneidemühl, f) Königsberg i. Pr. nach Erfurt, g) Landsberg a. W. nach Eisenach?

10. Benutze die Angaben und die graphische Darstellung von Aufgabe 9. a) Jemand fährt von Königsberg i. Pr. in der Richtung Eisenach 752 km. Welche Station hat er erreicht? b) Er fährt in gleicher Richtung von Landsberg a. W. 399 km; welche Station hat er erreicht? c) Jemand fährt in entgegengesetzter Richtung von Gotha 545 km; wohin ist er gekommen?

11.[1]) Augustus regierte von 30 v. Chr. bis 14 n. Chr. **a)** Wie lange hat er regiert? — Er starb im Alter von 75 Jahren; **b)** in welchem Jahre ist er geboren, **c)** in welchem Alter kam er zur Regierung?

12. a) Berlin hat 52° 30′ nördliche, Kapstadt 33° 56′ südliche Breite. Wie groß ist der Breitenunterschied zwischen beiden Städten? Stelle ebenso den Breitenunterschied fest von **b)** Buenos Aires (— 34° 33′) und Hamburg (+ 53° 33′), **c)** Paris (+ 48° 50′) und St. Helena (— 15° 50′), **d)** Liverpool (+ 53° 36′) und Sydney (— 33° 52′).

13. Kopenhagen liegt 12° 34′ östlich, Chicago 87° 37′ westlich, München 11° 39′ östlich, Danzig 18° 26′ östlich, Gibraltar 5° 20′ westlich, Honolulu 157° 55′ westlich von Greenwich. Wie groß ist der Längenunterschied von **a)** Kopenhagen und Chicago, **b)** Danzig und Gibraltar, **c)** München und Gibraltar, **d)** Danzig und Honolulu?

14. Der durchschnittliche tägliche Wasserkonsum einer Stadt beträgt 17153 cbm. In einer Hitzeperiode werden an 5 aufeinanderfolgenden Tagen gebraucht: 19518 cbm, 18598 cbm, 19875 cbm, 20122 cbm, 19916 cbm. An den entsprechenden Tagen des Vorjahres waren die Verbrauchsziffern 15917 cbm, 16728 cbm, 17215 cbm, 16576 cbm, 16162 cbm. **a)** Welches sind für jeden der 10 genannten Tage die Abweichungen vom Mittel und **b)** wie groß ist der Unterschied im Verbrauche an jedem Tag des Jahres und dem des Vorjahres?

15. Man hat durch Rechnung auf 5 Stellen gefunden, daß der Umfang eines Kreises das 3,1416fache seines Durchmessers ist. Man hat nun einen dünnen Faden fest um ein Rad von 1 m Durchmesser gelegt und bei 4 verschiedenen Messungen die Längen 3,150 m, 3,141 m, 3,146 m, 3,137 m erhalten. Welches ist der jeweilige Fehler der Messung (dazu kommt die Abweichung des Rades von der Kreisgestalt)?

16. Das arithmetische Mittel zwischen den Zahlen 74, 81, 72, 79, 80, 76 ist 77. Um wieviel weichen die einzelnen Zahlen vom Mittel ab?

17. A hat 375 ℳ Vermögen und keine Schulden, B hat 285 ℳ Schulden und kein Vermögen. **a)** Wieviel Vermögen haben A und B zusammen? **b)** Wieviel Vermögen hat A mehr als B?

18. A hat 573 ℳ Vermögen, B hat 986 ℳ Schulden. Wieviel Vermögen haben **a)** A und B zusammen? **b)** Wieviel Vermögen hat A mehr als B? **c)** Wieviel Schulden haben A und B zusammen? **d)** Wieviel Schulden hat B mehr als A?

§ 10. Addition und Subtraktion relativer Zahlen.

Addition.

1. Was bedeutet an der Zahlengeraden **a)** $(+5)+(+3)$? Was bedeutet **b)** $(+5)+(-3)$, **c)** $(-5)+(+3)$, **d)** $(-5)+(-3)$? **e—h)** Erläutere die vier Fälle unter Verwendung der Begriffe Vermögen und Schulden.

---

1) Bei dieser Aufgabe spielt die Frage eine Rolle, ob es ein Jahr 0 gibt, oder, was auf dasselbe herauskommt, ob die Jahreszahlen Ordinal- oder Kardinalzahlen sind.

In den folgenden Aufgaben sind die untereinander stehenden einfachen oder zusammengesetzten Größen zu addieren. Die Aufgaben sind statt in zwei oder mehr Zeilen auch in einer Zeile (mit Verwendung von Klammern) zu schreiben:

	a)	b)	c)	d)	e)
2.	$\begin{array}{r}+12\\+7\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-9\\-4\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-7\\+8\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-8\\+3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}+5\\-13\\\hline\end{array}$
3.	$\begin{array}{r}+3a\\+7a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-5b\\-6b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}+9c\\-c\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-9d\\+d\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-2x\\+8x\\\hline\end{array}$
4.	$\begin{array}{r}+\frac{1}{2}a\\+\frac{1}{3}a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-3\frac{1}{4}b\\+2\frac{1}{2}b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-\frac{5}{6}c\\+\frac{1}{3}c\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-3\frac{3}{4}d\\-4\frac{1}{4}d\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-\frac{17}{2}x\\+\frac{13}{3}x\\\hline\end{array}$
5.	$\begin{array}{r}+a\\+b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-a\\-b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-a\\+b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}+2a\\-3b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-3a\\+5b\\\hline\end{array}$
6.	$\begin{array}{r}n\\+1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}n\\-1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}n-1\\+1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}+3\\n-2\\\hline\end{array}$	
7.	$\begin{array}{r}a-4\\+5\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}a-6\\6\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}5+a\\-6\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}1-a\\-1\\\hline\end{array}$	
8.	$\begin{array}{r}x+1\\2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}x+1\\-2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}4\\+x\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}7\\x-3\\\hline\end{array}$	
9.	$\begin{array}{r}-5\\4-a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-7\\a-5\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}7-a\\-7\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}a+1\\-2\\\hline\end{array}$	
10.	$\begin{array}{r}-3\\n-1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-5\\5-n\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}5+n\\-5\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}n-1\\+2\\\hline\end{array}$	
11.	$\begin{array}{r}1-m\\+2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}3-m\\-2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}7+2m\\-2m\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}3m-5\\-m\\\hline\end{array}$	
12.	$\begin{array}{r}a-b\\b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}a-b\\-b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}m\\m-n\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}n\\m-n\\\hline\end{array}$	
13.	$\begin{array}{r}x\\y-x\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-x\\x+y\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-x\\x-y\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}x-y\\+y\\\hline\end{array}$	
14.	$\begin{array}{r}a-3b\\+4b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-2a\\a-2b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}-5b\\a+4b\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}3a-5b\\+3b\\\hline\end{array}$	
15.	$\begin{array}{r}5a\\1-4a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}4a-1\\+7a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}3a+1\\-4a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}8a\\1-8a\\\hline\end{array}$	
16.	$\begin{array}{r}n-1\\n+1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}n-7\\n+5\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}n-1\\3-2n\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}n-8\\7-n\\\hline\end{array}$	
17.	$\begin{array}{r}5x-3\\1+x\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}a-1\\1-a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}a+x\\x-a\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{r}a-x\\x+a\\\hline\end{array}$	

18. a) $\begin{array}{l} 7 - x \\ \underline{2x - 10} \end{array}$ b) $\begin{array}{l} a - 5 \\ \underline{2 - 3a} \end{array}$ c) $\begin{array}{l} 7a - x \\ \underline{2x - 5a} \end{array}$ d) $\begin{array}{l} 2a - 3b \\ \underline{3b + a} \end{array}$

19. a) $\begin{array}{l} n - 3 \\ \underline{m + 5} \end{array}$ b) $\begin{array}{l} n + 1 \\ \underline{a - 3} \end{array}$ c) $\begin{array}{l} a - 1 \\ \underline{3 - x} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 3a - n \\ \underline{n - b} \end{array}$

20. a) $\begin{array}{l} a + x \\ \underline{x - 1} \end{array}$ b) $\begin{array}{l} a - b \\ \underline{1 + a} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} m - n \\ \underline{3n - m} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} m - n \\ \underline{n + 1} \end{array}$

21. a) $\begin{array}{r} m - 2 \\ \underline{-n + 1} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} m - 3 \\ \underline{-3 - n} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} m - 2n \\ \underline{-n - 2m} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 3x - 2y \\ \underline{-3y - 2x} \end{array}$

22. a) $\begin{array}{r} +7a \\ -3a \\ +4a \\ \underline{-5a} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} -18b \\ +5b \\ +10b \\ \underline{-9b} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} +13x \\ -17x \\ -8x \\ \underline{+2x} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} -9x \\ +x \\ +9x \\ \underline{-7x} \end{array}$

23. a) $\begin{array}{r} +7p \\ -9q \\ -2p \\ \underline{+3q} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} +a \\ -b \\ +c \\ \underline{+b} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} +x \\ +y \\ -z \\ \underline{-2x} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} +2a \\ +3b \\ -a \\ \underline{-2b} \end{array}$

24. a) $\begin{array}{l} 7a - 3b + 2c - 3d \\ \underline{5a - 4b - 5c + 7d} \end{array}$ b) $\begin{array}{l} a + b - c + d \\ \underline{a - b - c + 3d} \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 8m - n + 7u + 3v \\ \underline{-9m + 4n - 7u - 5v} \end{array}$

25. $\begin{array}{r} 1\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{5}y + 2\frac{1}{2}z + 1\frac{1}{2}v - 5\frac{1}{3}p \\ \underline{-2\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{3}y - 1\frac{5}{6}z - 1\frac{1}{2}v + 4\frac{1}{2}p} \end{array}$

26. $\begin{array}{l} \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}b + \frac{2}{3}c - \frac{5}{6}d + \frac{4}{3}e + \frac{1}{2}g \\ \underline{\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}c - \frac{1}{2}d - \frac{4}{3}e + \frac{1}{3}f} \end{array}$

27. a) $\begin{array}{r} 5a - 3b + 3c - d \\ -3a + b - 2c + 7d \\ +2a - 5b - 8c + d \\ \underline{-3a + 4b + 7c - 9d} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 7x - y + u - v \\ -5x + 4y - 8u + 4v \\ -2x + 5y + 3u + 7v \\ \underline{+x - 8y + 4u - 4v} \end{array}$

28. $\begin{array}{r} 1{,}34\,m - 7{,}6n - 9{,}37p + 1{,}38q \\ -9{,}4\,m - 8{,}7n - 81{,}7p - 0{,}89q \\ \underline{9{,}76\,m + 9{,}3n + 4{,}33p + 7{,}02q} \end{array}$

Subtraktion.

29. Was bedeutet an der Zahlengeraden **a)** $(+5) - (+3)$, **b)** $(+3) - (+5)$, **c)** $(+5) - (-3)$, **d)** $(-5) - (+3)$, **e)** $(-5) - (-3)$? **f—k)** Erläutere die einzelnen Fälle unter Verwendung der Begriffe Vermögen und Schulden.

In den folgenden Aufgaben ist die an erster Stelle stehende Zahl als Minuend, die an zweiter Stelle stehende als Subtrahend zu verwenden. Die Aufgaben sind auch unter Verwendung von Klammern in einer Zeile zu schreiben.

	a)	b)	c)	d)	e)
30.	$+12$ $+7$	-12 -7	$+12$ -7	-12 $+7$	$+8$ -5
31.	$+6$ $+11$	-6 -11	$+6$ -11	-6 $+11$	$+21$ -13
32.	$+8a$ $+5a$	$+9x$ $-3x$	$-11b$ $-8b$	$-8m$ $+m$	$-7x$ $+3x$
33.	$+7a$ $+11a$	$-5a$ $+12a$	$-4a$ $-9a$	$+3a$ $-11a$	$-3x$ $+9x$
34.	$+a$ $+b$	$-a$ $-b$	$+a$ $-b$	$-a$ $+b$	$-2a$ $+3$
35.	$+2y$ $+3x$	$+5y$ $-4x$	$-7y$ $+3x$	$-3y$ $-4x$	$+7$ $-5a$
36.	$n-1$ 1	$n+1$ 1	5 $x+2$	$x+3$ 7	
37.	$x-7$ $+5$	$x-2$ -2	3 $x-2$	-5 $3-x$	
38.	$1-a$ -1	-1 $a-1$	-1 $1-a$	-1 $1+a$	
39.	$m-n$ n	$m-n$ m	n $m-n$	m $m-n$	
40.	$-x$ $x-y$	$-y$ $x-y$	$x-y$ $-x$	$x+y$ $-y$	
41.	$a-b$ $2b$	$a+b$ $2b$	$2a$ $a+b$	$3b$ $a+b$	
42.	$a-b$ $2a$	$2a$ $a-b$	$2b$ $a-b$	$a-b$ $+b$	
43.	$x-5y$ $+3y$	$x-4y$ $-3x$	$2x-y$ $-2y$	$x+2y$ $+3x$	
44.	$+5x$ $x-y$	$7y$ $3x+5y$	$4x$ $2y-x$	$8x$ $y+9x$	
45.	$-3x$ $x-2y$	$-2y$ $x-3y$	$-4y$ $y-x$	$-5y$ $2y-3x$	
46.	$7n$ $1-5n$	$-3n$ $4n-1$	$8n-1$ $-2n$	$1-8n$ -5	

47. a) $\begin{array}{r} n - 1 \\ \underline{n + 1} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} a - x \\ \underline{x - a} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} x + y \\ \underline{x - y} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} x + 5 \\ \underline{x - 7} \end{array}$

48. a) $\begin{array}{r} a + 3 \\ \underline{2 - a} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} a - 1 \\ \underline{3 - 2a} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} a + 1 \\ \underline{5 - a} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} n + 1 \\ \underline{7 - 5n} \end{array}$

49. a) $\begin{array}{r} n + 1 \\ \underline{1 - n} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} n - 1 \\ \underline{1 - n} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} n - 1 \\ \underline{1 + n} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 1 - n \\ \underline{n + 1} \end{array}$

50. a) $\begin{array}{r} 5 - x \\ \underline{3 - 2x} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 8 + x \\ \underline{13 - x} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} x + 5 \\ \underline{5 - 2x} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 7 + 2x \\ \underline{3x + 7} \end{array}$

51. a) $\begin{array}{r} m - 1 \\ \underline{n - 1} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} m - 1 \\ \underline{n + 1} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} m + 1 \\ \underline{n - 1} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} m + 1 \\ \underline{1 - n} \end{array}$

52. a) $\begin{array}{r} n + x \\ \underline{-x + 1} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} n - x \\ \underline{-1 - x} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} a - x \\ \underline{-a - 1} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} x + y \\ \underline{-y - a} \end{array}$

53. a) $\begin{array}{r} n + 2 \\ \underline{m - 3} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} x - 5 \\ \underline{5 - y} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 2x - 3y \\ \underline{2y - 3x} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 3a - b \\ \underline{b + 3a} \end{array}$

54. a) $\begin{array}{r} 7a - 5b \\ \underline{2b - a} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 7a + 3b \\ \underline{7b + 3a} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 5a - b \\ \underline{8a + b} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 3a - 5b \\ \underline{b + 2a} \end{array}$

55. $\begin{array}{r} 9a - 8b + 7c - 3d \\ \underline{5a - 6b - 3c + 2d} \end{array}$ 56. $\begin{array}{r} a - 2b + 3c - 4d \\ \underline{7a + 3b - 5c + 8d} \end{array}$

57. $\begin{array}{r} 4x - 3y + 9u - 8v \\ \underline{5x + 4y - 3u - 8v} \end{array}$ 58. $\begin{array}{r} m - 3n + p - 7 \\ \underline{m - 4n - p + 8} \end{array}$

Gleichungen.

Löse folgende Gleichungen:

59. $9 + x = 5.$ 60. $13 = 9 - x.$

61. $18 = 7 - x.$ 62. $x - 11 = -6.$

63. $9 - x = -5.$ 64. $19{,}8 = 18{,}9 - x.$

65. $x + 7{,}5 = 5{,}7.$ 66. $\frac{1}{6} - x = -\frac{1}{3}.$

67. $\frac{4}{5} + x = \frac{3}{4}.$ 68. $\frac{2}{5} = \frac{3}{8} - x.$

69. $x - b = 0.$ 70. $x + a = 0.$

71. $x - a = -a.$ 72. $a - x = -a$

73. In der konstanten Summe $a + b = 10$ durchläuft a die Reihe der ganzen Zahlen von -10 bis $+20$. a) Welche Zahlen muß b durchlaufen? b) Stelle die Reihe der Zahlen a und der ihnen entsprechenden Zahlen b auf der Zahlengeraden in geeignetem Maßstabe dar.

74. In der konstanten Differenz $a - b = 5$ durchläuft a die Reihe der ganzen Zahlen von -10 bis $+20$. a) Welche Zahlen muß b durchlaufen? b) Stelle die Reihe der Zahlen a und der ihnen entsprechenden Zahlen b auf der Zahlengeraden in geeignetem Maßstabe dar.

75. In der konstanten Differenz $a - b = -3$ durchläuft b die Reihe der ganzen Zahlen von $+5$ bis -5. a) Welche Zahlen muß a durchlaufen? b) Stelle die Reihe der Zahlen b und der ihnen entsprechenden Zahlen a auf der Zahlengeraden in geeignetem Maßstabe dar.

§ 11. Multiplikation und Division relativer Zahlen.

Multiplikation von Monomen.

Führe für die Definitionsgleichungen der Multiplikation relativer Zahlen:

$$\begin{aligned} &\mathbf{1.}\ (+a)\cdot(+b) = +ab,\\ &\mathbf{2.}\ (+a)\cdot(-b) = -ab,\\ &\mathbf{3.}\ (-a)\cdot(+b) = -ab,\\ &\mathbf{4.}\ (-a)\cdot(-b) = +ab,\end{aligned}$$

folgende Beispiele aus:

a) $a = 3,\ \ b = 2$; b) $a = \frac{1}{2},\ \ b = \frac{2}{3}$; c) $a = 0{,}2,\ \ b = 0{,}5$.

5. Zeige, daß die für die Multiplikation zweier positiver Faktoren geltende Regel

$$(x + a)(y - b) = xy - xb + ay - ab$$

bei Einführung der Definitionsgleichung 2 auch für den Fall $x = 0,\ y = 0$ erhalten bleibt.

6. Zeige, daß die für die Multiplikation zweier positiver Faktoren geltende Regel

$$(x - a)\cdot(y + b) = xy + xb - ya - ab$$

bei Einführung der Definitionsgleichung 3 auch für den Fall $x = 0,\ y = 0$ erhalten bleibt.

7. Zeige, daß die für die Multiplikation zweier positiver Faktoren geltende Regel

$$(x - a)\cdot(y - b) = xy - ay - bx + ab$$

bei Einführung der Definitionsgleichung 4 auch für den Fall $x = 0,\ y = 0$ erhalten bleibt.

Bringe folgende Produkte auf die einfachste Form:

8. a) $(+3ab)\cdot(-2cd)$, b) $(-3x)\cdot(-5y)$,
c) $(-2m)\cdot(+7n)$, d) $5ax\cdot(-8ay)$.

9. a) Berechne $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$. b) Welche Potenzen von -1 ergeben den Wert $+1$?

10. a) $(-3)^2$, b) $(-3)^3$, c) $(-3)^4$.

11. a) $(-a)^2$, b) $(-a)^3$, c) $(-a)^4$.

12. Welche Potenzen negativer Zahlen sind positiv?

13. a) $(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)$, b) $(-2)\cdot(+3)\cdot(+4)\cdot(-5)$,
c) $(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)\cdot(-d)$, d) $(+1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(+4)\cdot(-5)$.

Multiplikation von Polynomen.

14. a) $-1(2a + 3b)$, b) $-1(2a - 3b)$,
c) $-1(-2a + 3b)$, d) $-1(-2a - 3b)$.

15. Setze in die Formel für $(a - b)\cdot(a + b)$ folgende Werte ein: a) $a = 1$; $b = 2$; b) $a = 1$; $b = 10$; c) $a = 0{,}01$; $b = 10$.

16. a—c) Setze die in Aufgabe 15 gegebenen Werte in die Formel für $(a - b)^2$ ein.

17. Beweise durch Ausrechnung, daß $(a - b)^2 = (b - a)^2$ ist.

Bringe die folgenden Ausdrücke auf die einfachste Form:

18. $(5a - 7b - 3c) \cdot (-2abc)$.

19. $(-5ab + 7ac - bc) \cdot (-2abc)$.

20. $(2a - 3b) \cdot (3x - 2y)$.

21. $(5a - 7b) \cdot (-8y + 2x)$.

22. $(5a - b) \cdot (-2a - 3b)$.

23. $(-3a - 5b) \cdot (7a - b)$.

24. $(a + 2)(a - 1) - (a + 1)(a - 2)$.

25. $(x + 4)(x - 2) - (x + 2)(x - 1)$.

26. $(a + 2)(a - 1) - (a + 3)(a - 2)$.

27. $(n + 7)(n - 5) - (n + 9)(n - 7)$.

28. $(5ab - 15ac + bd - 3cd)(5ab + 15ac - bd - 3cd)$.

29. $(9ac + 3ad - 2bd - 6bc)(9ac - 3ad - 2bd + 6bc)$.

30. $(a + b)(a + b)(a + b)$.

31. $(a - b)(a - b)(a - b)$.

32. a) $(x + y)^3$, **b)** $(x - y)^3$.

33. a) $(x + 1)^3$, **b)** $(x - 1)^3$.

34. a) $(3a - 2b)^3$, **b)** $(2a - 5b)^3$.

35. a) $(2a - 3)^3$, **b)** $(1 + 2a)^3$.

36. $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

37. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

38. $(2x - 1)(3x + 5)(x + 1)$.

39. $(3x + 5)(2x - 3)(x - 1)$.

40.—42. Ersetze in den Aufgaben 24, 26, 34 a durch $-b$ und berechne die Ausdrücke.

43.—49. Ersetze in den Aufgaben 25, 32, 33, 36, 37, 38, 39 x durch $-x$ und berechne die Ausdrücke.

50.—53. Ersetze in den Aufgaben 28, 29, 30, 31 a durch $-b$ und b durch $-a$ und berechne die Ausdrücke.

Division von Monomen.

Berechne die folgenden Quotienten und mache jedesmal die Probe:

54. a) $(+a):(+b)$, **b)** $(-12):(-3)$,
c) $(+6a):(-3b)$, **d)** $(+3\frac{1}{3}):10$.

55. a) $(-a):(-b)$, **b)** $(-20):(+5)$,
c) $(-12x):(-4y)$, **d)** $(-2\frac{1}{2}):(-2\frac{1}{7})$.

56. a) $(-x):(+y)$, **b)** $(+3):(-15)$,
c) $(-24np):(+4n)$, **d)** $(+\frac{5}{12}):(-\frac{10}{3})$.

57. **a)** $(+x):(-y)$, **b)** $(-8):(+12)$,
c) $(+\frac{3}{5}):(-6)$, **d)** $(-\frac{7}{8}):\frac{5}{4}$.

58. **a)** $(+7a)\cdot(-9b):(-21a)$, **b)** $(+am)\cdot(+bn):(-an)$.

59. **a)** $(-7x)\cdot(-6y):(+14y)$, **b)** $(+10x^2)\cdot(-6y^2):(-4xy)$.

60. **a)** $(-8m)\cdot(+9n):(-12n)$, **b)** $(-12abc)\cdot(-15xy):(20cy)$

Division von Polynomen.

Führe die folgenden Divisionen aus:

61. $(mx - my):(-m)$.
62. $(24ab - 21b^2 - 3b):(-3b)$.
63. $(-x^2 + 20xy - 6x^2y):(-4x)$.
64. $(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}xy):(-\frac{2}{3}x)$.

In den folgenden Quotienten ist entweder der Dividend in geeigneter Weise in Faktoren zu zerlegen, oder es ist die Division schrittweise auszuführen.

65. $(am - bm):(a - b)$.
66. $(mx - x):(m - 1)$.
67. $(ac - ad + bc - bd):(c - d)$.
68. $(m^2 - mx - m + x):(m - 1)$.
69. $(6am - 9an - 4bm + 6bn):(3a - 2b)$.
70. $(6ac - 2ad + 4af - 9bc + 3bd - 6bf):(2a - 3b)$.
71. $(2ax - 6bx + 8cx - ay + 3by - 4cy):(2x - y)$.
72. $(a^2 + ab - 2b^2):(a - b)$.
73. $(3a^2 + ab - 2b^2):(3a - 2b)$.
74. $(9x^2 + 6xy - 8y^2):(3x - 2y)$.
75. $(x^2 - 8x + 7):(x - 7)$.
76. $(x^2 - 2x - 15):(x - 5)$.
77. $(x^2 + x - 20):(x - 4)$.
78. $(x^2 - y^2):(x - y)$.
79. $(a^2 - 25):(a + 5)$.
80. $(\frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{8}x - 2\frac{1}{2}):(\frac{3}{5}x - \frac{1}{2})$.
81. $(\frac{7}{5}x^2 - \frac{5}{7}y^2):(7x - 5y)$.
82. $(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{2}b^2):(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b)$.
83. $(0{,}4x^2 + 1{,}47x - 8{,}5):(0{,}8x - 2{,}5)$.
84. $(2{,}21n^2 - 1{,}8np - 1{,}61p^2):(0{,}7p + 1{,}3n)$.
85. $(3{,}9x^2 - 4{,}1xy - 11\frac{2}{3}y^2):(1\frac{1}{2}x - 3{,}5y)$.
86. $(2a^2 - \frac{2}{15}ax - 11\frac{1}{5}x^2):(3{,}5x + 1{,}5a)$.
87. $(a^3 - a^2b + 2b^3):(a + b)$.
88. $(6x^3 + x^2 - 29x + 21):(2x - 3)$.
89. $(2x^3 - 2x^2 - 6\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}):(2x - 3)$.

90. $(a^3 - b^3) : (a - b)$.
91. $(a^3 + b^3) : (a + b)$.
92. $(81a^4 - 16b^4) : (3a + 2b)$.
93. $(a^5 + b^5) : (a + b)$.
94. $(9a^2b^2 - 4a^2c^2 + 4abc^2 - b^2c^2) : (3ab - 2ac + bc)$.
95. $(a^2 - b^2 + 2bc - c^2) : (a + b - c)$.
96. $(3a^2 - 4ab + 8ac - 4b^2 + 8bc - 3c^2) : (a - 2b + 3c)$.
97. $(x^2 - 2xz - 4y^2 + 8yz - 3z^2) : (x - 2y + z)$
98. $(16x^2 - 4a^2 + 9a^2b^2 - 36b^2x^2) : (3ab - 2a + 6bx - 4x)$.
99. $(329bx - 208ax + 87ab - 153x^2 - 156b^2 + 153a^2)$
$: (17a - 13b + 9x)$.
100. $(6x^2 - 21{,}38xy - 6xz + 18{,}5y^2 + 1{,}64yz - 36z^2)$
$: (2{,}5x - 3{,}7y + 5z)$.
101. $(3a^3 + 6a^2b + 9a^2c + 2ab^2 + 4b^3 + 2bc^2 + 6b^2c + ac^2 + 3c^3)$
$: (a + 2b + 3c)$.

Untersuche, welche von den folgenden Divisionen ausführbar sind, welche nicht:

102. $(a^2 + b^2) : (a + b)$.
103. $(a^3 - b^3) : (a^2 - b^2)$.
104. $(a^2 - 24) : (a - 3)$.
105. $(a^5 + 32) : (a + 16)$.
106. $(a^2 + b^2 + c^2) : (a + b + c)$
107. $(a^4 - b^4) : (a + b)$.
108. $(a^4 + b^4) : (a + b)$.
109. $(x^6 - y^6) : (x^3 + y^3)$.
110. $(x^6 + y^6) : (x^3 + y^3)$.
111. $(u^6 + u^3v^3 + v^6) : (u^2 + uv + v^2)$.
112. $(9a^2 + 30ab^2 + 25b^4) : (3a + 5b^2)$.
113. $(a^4 - b^4) : (a^3 - b^3)$.

Gleichungen.

Löse die folgenden Gleichungen:

114. $-2x = 5$.
115. $-3x = -6$.
116. $4x = -12$.
117. $36 = -9x$.
118. $33x = -11$.
119. $7x = 0$.
120. $7x = -4{,}2$.
121. $0{,}72 = -9x$.
122. $0{,}3 = -6x$.
123. $8\frac{3}{4} = -5x$.
124. $13x = -10\frac{1}{2}$.
125. $29x - 97 = -10$

126. $8{,}5 - 14x = -1{,}3$. **127.** $7x + 19 = 14{,}8$.

128. $5{,}2 = 9 - 19x$. **129.** $\frac{x}{8} = 0$.

130. $19 - 3x = 14 - 8x$. **131.** $51x + 35 = 15x - 73$.

132. $51x - 45 + 71 - 9x = x - 145 + 39 - 47x$.

133. $25 - x - 97 + 39x = 73x - 26 - 81x + 41 + 17x$.

134. $x = 91 - 76x - 35 + 27x + 47 + 9x + 33 + 7x$.

Viertes Kapitel.

Die vier Grundrechenarten mit Brüchen.[1])

§ 12. Kürzen und Erweitern der Brüche.

Der Begriff des Bruches.

1. Zeichne auf der Zahlengeraden die Brüche **a)** $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, **b)** $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{3}{11}$ ein, und ordne sie auf Grund dieser Darstellung in eine vom kleinsten zum größten Bruch fortschreitende Reihe.

2. Das arithmetische Mittel von n Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$ (der Durchschnittswert von $a_1, a_2, \ldots a_n$) ist

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

a) Berechne das arithmetische Mittel der Zahlen 1—10. **b)** Berechne den durchschnittlichen Wasserverbrauch an den 5 Hitzetagen in der Aufgabe 14 von § 9. **c)** Berechne den durchschnittlichen Wasserverbrauch an den 5 Tagen des Vorjahres in der Aufgabe 14 von § 9.

3. Die einfachen Zinsen eines zu $p\%$ n Jahre ausgeliehenen Kapitals betragen

$$z = \frac{k \cdot p \cdot n}{100}.$$

Berechne die Zinsen für

a) $k = 12000, \quad p = 4, \quad n = 1,$
b) $k = 1250, \quad p = 3, \quad n = 2,$
c) $k = 800, \quad p = 4, \quad n = 3.$

Wie lautet die Formel, wenn das Kapital **d)** m Monate, **e)** t Tage ausgeliehen ist?

4. Wie heißt der reziproke Wert von **a)** $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{7}{10}$, **c)** $\frac{1}{4}$, **d)** $2\frac{1}{2}$, **e)** $\frac{1}{10}$, **f)** $1\frac{1}{2}$, **g)** 3, **h)** 4, **i)** 1, **k)** $\frac{a}{b}$, **l)** $\frac{1}{a}$, **m)** a.

5. Zeige an der Zahlengeraden, daß **a)** $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, **b)** $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, **c)** $\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$, **d)** $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, **e)** $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$ ist.

---

1) Da das Rechnen mit ziffernmäßig gegebenen Brüchen von der Unterstufe her bekannt ist, konnten wir solche Brüche auch schon in den vorangehenden Kapiteln benutzen.

Kürzen von Brüchen.

Kürze die folgenden Brüche:

6. $\frac{24}{8}$. 7. $\frac{-7}{49}$. 8. $\frac{42}{6}$.

9. $\frac{6}{-8}$. 10. $\frac{-8}{12}$. 11. $\frac{-18}{6}$.

12. $\frac{3a}{a}$. 13. $\frac{5b}{b}$. 14. $\frac{7c}{7}$.

15. $\frac{3ab}{a}$. 16. $\frac{a^2b}{b}$. 17. $\frac{2a^3b}{a^2}$.

18. $\frac{3a^2b}{ab}$. 19. $\frac{4a^2b}{2ab}$. 20. $\frac{5a^2b^2}{-10a^2b^3}$.

21. $\frac{-3ab^2}{2a^2b}$. 22. $\frac{3a^2bc}{3ab^2c^2}$. 23. $\frac{48ab^2c^2}{12abc}$.

24. $\frac{9a^2b}{15a^2b^2c^2}$.

Kürze die folgenden Brüche und sorge dafür, daß sie einen positiven Nenner erhalten:

25. $\frac{xy}{-yx}$. 26. $\frac{x}{-x^2}$. 27. $\frac{x}{-x^3}$.

28. $\frac{3ab^2c^2}{-a^2bc}$. 29. $\frac{-3ab^2}{-6ab}$. 30. $\frac{-\frac{1}{2}a^2x^2y}{-\frac{1}{2}axy^2}$.

Faktorenzerlegung.

Zerlege in Primfaktoren:

31. a) 18, b) 24, c) 48, d) 50, e) 60.
32. a) 72, b) 80, c) 90, d) 96, e) 100.
33. a) 108, b) 120, c) 128, d) 144, e) 360.
34. a) 450, b) 1000, c) 7425, d) 8575, e) 1008.

35. Stelle eine Tafel der Primzahlen von 1 bis 100 auf (Sieb des Eratosthenes).

Zerlege in den folgenden Brüchen Zähler und Nenner in Faktoren und kürze sie dann:

36. a) $\frac{16}{12}$, b) $\frac{40}{16}$, c) $\frac{24}{80}$, d) $\frac{112}{150}$, e) $\frac{72}{180}$.
37. a) $\frac{56}{30}$, b) $\frac{18}{20}$, c) $\frac{135}{90}$, d) $\frac{323}{437}$, e) $\frac{144}{900}$.

Zerlege in möglichst viele Faktoren:

38. a) $40ab^2$, b) $25ax^2$, c) $20a^2$, d) $18ab$.
39. a) $72abx^2$, b) $121a^2bxy$, c) $24ab^2x^2y$, d) $180p^2r^2$.

In den folgenden Ausdrücken ist die Zerlegung in Faktoren dadurch zu erreichen, daß gemeinsame Faktoren der Glieder vor die Klammer gezogen werden.[1])

1) Die ersten Aufgaben dieser Gruppe dienen zur Wiederholung von Aufgaben, wie sie in § 8, Aufgabe 120 bis 157 gestellt wurden.

40. $8a + 8b$.
41. $5x - 5y$.
42. $-7x - 7y$.
43. $ax - bx$.
44. $ax + ay$.
45. $12a - 18b$.
46. $4ax - 2bx$.
47. $ab - b$.
48. $3x - 3$.
49. $ax + a$.
50. $ax - x$.
51. $a^2 + a$.
52. $x^2 - x$.
53. $ax - 2ay + 3az$.
54. $mx - nx + px$.
55. $ax - bx + 7x$.
56. $8abx - 6acy - 10az$.
57. $15abx - 9b^2y + 12bt$.
58. $14anx - 21bny - 7n$.
59. $20ax - 35bx - 40x^2$.
60. $63xy - 84y^2 + 98yz$.
61. $ax + bx + cx - dx$.
62. $am - ap + ax - ay$.
63. $a(x+y) - b(x+y)$.
64. $a(x-y) - b(x-y)$.
65. $t(2x-3y) - 5(2x-3y)$.
66. $2x(3p-q) - (3p-q)$.
67. $m(x+y) - x - y$.
68. $n(x-y) - x + y$.
69. $ax + ay + bx + by$.
70. $ac + ad - bc - bd$.
71. $ac - cx + a - x$.
72. $ax - a + x - 1$.
73. $ab - bc - a + c$.
74. $ab - a - b + 1$.
75. $2ax - 3by - 2by + 3ay$.
76. $3ax - 5by - 5ay + 3bx$.
77. $10n^2 + 21xy - 14nx - 15ny$.
78. $40x^2 - 2p + 5x - 16px$.
79. $30ax - 34bx - 15a + 17b$.
80. $56a^2 - 40ab + 63ac - 45bc$.
81. $90x^2 - 25ax - 288bx + 80ab$.
82. $91x^2 - 112mx + 65nx - 80mn$.
83. $ax - bx + cx + ay - by + cy$.
84. $2ax - 5ay + a - 2bx + 5by - b$.
85. $(4a-5b)(3m-2p) + (a+4b)(3m-2p)$.
86. $(7a-3x)(5c-2d) - (6a-2x)(5c-2d)$.
87. $(3x-y)(2a+p) - (3x-y)(a-q)$.
88. $(x-y)(3a+4b) - (4a-5b)(x-y) + (x-y)(2a-8b)$.
89. $3(2a+7b)(2m-3p) + 5(3a-4b)(2m-3p)$.
90. $7(a-2b)(2x-3y) - 5(a-2b)(3x-4y)$.
91. $a^2 + 2ab + b^2$.
92. $x^2 - 2xy + y^2$.
93. $a^2 - 6a + 9$.
94. $x^2 + 2x + 1$.
95. $x^2 - 4x + 4$.
96. $x^3 + 4x^2 + 4x$.
97. $a^2 - b^2$.
98. $m^2 - n^2$.
99. $36x^2 - 25y^2$.
100. $9a^2b^2 - y^2$.
101. $a^2 - 1$.
102. $1 - x^2$.
103. a) $a^3 - b^3$, b) $x^3 - 1$.
104. a) $a^3 + b^3$, $x^3 + 1$.
105. $27x^3 - 8y^3$.
106. $64a^3 + 125b^3$.

107. $a^4 - b^4$. 108. $a^5 + b^5$.
109. $(a-b)^2 - x^2$. 110. $(2a-3b)^2 - 4b^2$.
111. $100x - 4(7x-2y)^2$. 112. $(a+3b)^2 - 9(b-c)^2$.
113. $9(2a-d)^2 - 4(3a-x)^2$.
114. $(4a+3b)^2 - 16(a-x)^2$.
115. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$. 116. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$.
117. $9x^2 - 6xy + y^2 - z^2$. 118. $9x^2 - 4y^2 + 4yz - z^2$.
119. $x^2 + (a+b)x + ab$. 120. $x^2 - (c+5)x + 5c$.
121. $x^2 - 5x + 6$. 122. $x^2 - 6x + 8$.
123. $a^2 - 7ab + 12b^2$. 124. $a^2 - 7ab + 10b^2$.
125. $x^2 + (a-b)x - ab$. 126. $x^2 - (n-3)x - 3n$.
127. $x^2 - x - 12$. 128. $x^2 + x - 12$.
129. $a^2 - 3ab - 10b^2$. 130. $a^2 + 2ab - 15b^2$.

Kürzen von Brüchen.

Kürze folgende Brüche durch Faktorenzerlegung, soweit es möglich ist:

131. $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}$. 132. $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$. 133. $\frac{7a-7b}{8b-8a}$.

134. $\frac{ax+ay}{3x+3y}$. 135. $\frac{am+bm}{am-bm}$. 136. $\frac{am-bm}{bn-an}$.

137. $\frac{ax-x}{ax+x}$. 138. $\frac{6x-6}{7x-7}$. 139. $\frac{5x^2+x}{5x^2-x}$.

140. $\frac{7a^2b-7ab^2}{7a^2c-7ac^2}$. 141. $\frac{3a^2x-2ax^2}{2a^2x-3ax^2}$. 142. $\frac{5x^2y-4xy^2}{5x^2y+4xy^2}$.

143. $\frac{3a-6b}{8b-4a}$. 144. $\frac{5x-5}{7-7x}$. 145. $\frac{ax-a}{b-bx}$.

146. $\frac{x+x^2}{x+1}$. 147. $\frac{x-x^2}{x-1}$. 148. $\frac{x^2+x}{x^2-1}$.

149. $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$. 150. $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$. 151. $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$.

152. $\frac{6a^2-6ab}{3(a-b)^2}$. 153. $\frac{a^2x-ax^2}{x^2-a^2}$. 154. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

155. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$. 156. $\frac{m^2-2mn+n^2}{n^2-m^2}$. 157. $\frac{(x-y)^2}{(y-x)^2}$.

158. $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$. 159. $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$. 160. $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$.

161. $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$. 162. $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$. 163. $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$.

164. $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$. 165. $\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$. 166. $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$.

167. $\frac{ax+bx-cx}{ay+by-cy}$. 168. $\frac{2a^2b+2ab^2-2abc}{3bc^2-3b^2c-3abc}$.

169. $\frac{ac+bc-ad-bd}{ac-bc-ad+bd}$. 170. $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$.

171. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$. 172. $\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}$.

173. $\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$. 174. $\frac{x^2-x-20}{x^2+x-30}$.

175. (Scherzfrage.) Es ist $\frac{26}{65}=\frac{2\not6}{\not65}=\frac{2}{5}$. Gibt es noch andere solche Brüche, bei denen die gleichen Zahlen (hier 6) einfach weggestrichen werden können?

Bestimme x durch geeignetes Kürzen der Brüche in folgenden Gleichungen (Proportionen):

176. $\frac{1}{x}=\frac{10}{30}$. 177. $\frac{x}{5}=\frac{75}{125}$ 178. $\frac{x}{8}=\frac{16}{64}$.

179. $\frac{17}{x}=\frac{34}{2}$. 180. $\frac{35}{91}=\frac{x}{13}$. 181. $\frac{75}{275}=\frac{3}{x}$.

182. $\frac{999}{111}=\frac{x}{3}$. 183. $\frac{60}{100}=\frac{12}{x}$ 184. $\frac{28ab}{7a}=\frac{x}{a}$

185. $\frac{12a}{3b}=\frac{x}{b}$. 186. $\frac{18b}{6ab}=\frac{x}{a}$. 187. $\frac{2a}{3a}=\frac{x}{3}$.

Erweitern von Brüchen.

188. Erweitere die folgenden Brüche derart, daß ihr Nenner 60 wird: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{1}{5}$, e) $\frac{1}{6}$, f) $\frac{1}{10}$.

189. Erweitere die folgenden Brüche derart, daß ihr Zähler 48 wird: a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{6}{7}$, e) $\frac{8}{9}$, f) $\frac{12}{13}$.

190. Erweitere die folgenden Brüche derart, daß ihr Nenner 10, oder wenn das nicht möglich, 100 oder 1000 usf. wird, und schreibe diese Brüche dann in Dezimalform: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{3}{20}$, e) $\frac{7}{16}$, f) $\frac{9}{32}$, g) $\frac{7}{40}$.

191. Bringe $\frac{1}{a}$ auf den Nenner a) a^2, b) ab, c) a^2b.

192. Bringe $\frac{1}{x+y}$ auf den Nenner a) $x^2+2xy+y^2$, b) x^2-y^2.

193. Bringe $\frac{a-1}{a+1}$ auf den Nenner a) a^2+2a+1, b) a^2-1, c) a^3+1.

194. Bringe $\frac{a+b}{a-b}$ auf den Nenner a) $a^2-2ab+b^2$, b) a^2-b^2, c) a^3-b^3.

Bestimme x durch geeignetes Erweitern der Brüche in folgenden Gleichungen (Proportionen):

195. $\frac{1}{2}=\frac{x}{6}$. 196. $\frac{2}{3}=\frac{x}{60}$. 197. $\frac{4}{5}=\frac{x}{70}$.

198. $\frac{3}{8}=\frac{x}{96}$. 199. $\frac{3}{4}=\frac{6}{x}$. 200. $\frac{2}{3}=\frac{144}{x}$

201. $\frac{4}{5}=\frac{132}{x}$. 202. $\frac{3}{8}=\frac{303}{x}$. 203. $\frac{1}{2}=\frac{x}{2a}$.

204. $\frac{1}{5} = \frac{x}{10b}$. **205.** $\frac{3}{7} = \frac{x}{35ab}$. **206.** $\frac{5}{8} = \frac{x}{32a^2}$.

207. $\frac{3}{5} = \frac{15a}{x}$. **208.** $\frac{2}{7} = \frac{16b}{x}$. **209.** $\frac{5}{6} = \frac{125a^2b^3}{x}$.

210. $\frac{1}{11} = \frac{17a^3}{x}$.

211. Lasse a) in $\frac{1}{x}$, b) in $\frac{5}{x}$ den Nenner x die Werte 1, 2, 3 usf. durchlaufen und trage, soweit es möglich ist, die Reihe der Ergebnisse auf die Zahlengerade auf. Welchem Werte nähert sich der Bruch, wenn der Nenner größer und größer wird?

212. Lasse a) in $\frac{1+x}{2+x}$, b) in $\frac{4+x}{5+x}$, c) in $\frac{5+x}{10+x}$ die Zahl x die Werte 1, 2, 3 usf. durchlaufen. Welchem Wert nähert sich der Bruch mit wachsendem x?

213. In a) $\frac{x}{y} = 2$, b) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, c) $\frac{x}{y} = a$, d) $\frac{y}{x} = b$ durchläuft x die Reihe der ganzen Zahlen. Welche Zahlen muß y durchlaufen?

214. In a) $\frac{1+x}{2+y} = 1$, b) $\frac{3+x}{1+y} = 3$, c) $\frac{3+x}{2+y} = 2$, d) $\frac{a+x}{b+y} = c$ durchläuft x die Reihe der ganzen Zahlen. Welche Werte durchläuft y?

215. Welchen Wert hat der Bruch a) $\frac{0}{4}$, b) $\frac{0}{m}$, c) $\frac{0}{2m}$, d) $\frac{0}{a+b}$, wenn m, a und b positive Zahlen sind?

§ 13. Addition und Subtraktion von Brüchen.

1. a) $\frac{1}{20} + \frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{60} + \frac{1}{15}$, c) $\frac{1}{8} - \frac{1}{72}$.

2. a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{10}$, b) $\frac{1}{24} + \frac{1}{40}$, c) $\frac{11}{14} - \frac{32}{63}$.

3. a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$, b) $\frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{105}$, c) $\frac{8}{15} + \frac{7}{12} + \frac{19}{20}$.

4. Auf der Zahlengeraden sind zwischen 0 und 1 die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ usf. bis $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ durch Striche angemerkt (Maßstab genügend groß!). a) Wo liegen die Striche am dichtesten? b) Welches ist der größte, c) welches ist der kleinste Abstand benachbarter Striche?

Führe die folgenden Additionen und Subtraktionen von Brüchen aus:

5. a) $\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}$, b) $\frac{7b}{4} - \frac{3b}{4}$, c) $\frac{5a}{7} + \frac{a}{7}$, d) $\frac{2a}{x} - \frac{a}{x}$.

6. a) $\frac{3a}{4} + \frac{5a}{4} - \frac{7a}{4}$, b) $\frac{8a}{5} + \frac{2a}{5} - \frac{7a}{5}$.

7. a) $\frac{5a}{x} - \frac{b}{x} - \frac{4a}{x}$, b) $\frac{3x}{n} + \frac{5x}{n} - \frac{4x}{n}$.

8. a) $\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3}$, b) $\frac{5a}{6} - \frac{4a}{5}$, c) $\frac{3x}{5} - \frac{4x}{15}$, d) $\frac{8n}{9} - \frac{7n}{18}$.

9. a) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3}$, b) $\frac{a}{2} - \frac{a}{3}$, c) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5}$, d) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5}$.

10. a) $\frac{a}{4} + \frac{b}{6} - \frac{a}{20} + \frac{b}{30}$, b) $\frac{x}{7} - \frac{y}{9} - \frac{x}{56} - \frac{y}{72}$.

11. a) $\frac{2a}{3} - \frac{3b}{5} - \frac{a}{6} + \frac{b}{10}$, b) $\frac{6x}{7} - \frac{3y}{5} + \frac{13x}{42} - \frac{7y}{30}$.

12. a) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} - \frac{a}{3} + \frac{5b}{6}$, b) $\frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{a}{30} + \frac{b}{20}$.

13. a) $\frac{x}{5} - \frac{y}{7} - \frac{y}{42} + \frac{x}{20}$, b) $\frac{x}{8} - \frac{y}{9} - \frac{x}{72} - \frac{y}{72}$.

14. a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, b) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$, c) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$, d) $\frac{2a}{3} - \frac{b}{x}$.

15. a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}$, b) $\frac{1}{3x} - \frac{1}{6x}$, c) $\frac{a}{2b} - \frac{a}{3b}$, d) $\frac{2a}{5x} - \frac{3a}{8x}$.

16. a) $\frac{a}{5x} - \frac{b}{10x}$, b) $\frac{m}{ax} + \frac{n}{bx}$, c) $\frac{3}{an} - \frac{5}{bn}$, d) $\frac{8b}{3a} - \frac{5b}{2a}$.

17. a) $\frac{a}{b} + 5$, b) $a + \frac{x}{3}$, c) $5n - \frac{x}{2y}$, d) $\frac{x}{y} + 1$.

18. a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{5}{z}$.

19. a) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$, b) $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$.

20. a) $\frac{4a}{5b} - \frac{3a}{4b}$, b) $\frac{5a}{6x} - \frac{7a}{30x}$, c) $\frac{2b}{5y} + \frac{7b}{20y}$, d) $\frac{7x}{10y} - \frac{8x}{15y}$.

21. a) $\frac{3ax}{5by} - \frac{ax}{10by}$, b) $\frac{6ab}{7xy} - \frac{5ab}{14xy}$, c) $\frac{3ax}{5b^2} + \frac{ax}{15b^2}$, d) $\frac{4a^2}{5bx} - \frac{11a^2}{20bx}$.

22. a) $\frac{2a}{3b} - \frac{5a}{6b} - \frac{a}{2b} + \frac{7a}{9b}$, b) $\frac{3x}{4y} - \frac{5x}{9y} - \frac{2x}{3y} + \frac{7x}{12y}$.

23. a) $\frac{3a}{5x} - \frac{7a}{10x} - \frac{a}{6x} + \frac{7a}{15x}$, b) $\frac{3n}{4p} - \frac{4n}{5p} + \frac{5n}{6p} + \frac{3n}{10p}$.

24. a) $\frac{2ab}{3xy} - \frac{3ab}{4xy} + \frac{5ab}{6xy}$, b) $\frac{5ax}{6by} - \frac{3ax}{8by} - \frac{7ax}{16by}$.

25. a) $\frac{5a^2}{6xy} - \frac{7a^2}{8xy} + \frac{4a^2}{15xy}$, b) $\frac{3ab}{5x^2} - \frac{5ab}{9x^2} + \frac{ab}{18x^2}$.

26. a) $\frac{a-2b}{a+b} + \frac{a+3b}{a+b}$, b) $\frac{3a+b}{a-b} - \frac{2a+b}{a-b}$.

27. a) $\frac{a}{x} - \frac{a+b}{2x}$, b) $\frac{a-b}{2x} - \frac{a+b}{5x}$.

28. a) $\frac{3x-2}{5} - \frac{5x-3}{2}$, b) $\frac{5x-4}{6x} - \frac{7x-6}{9x}$.

29. $\frac{2a-8b+4}{6} - \frac{3a-4b+9}{8} + \frac{a-1}{12}$.

30. $\frac{4x-5y+8}{18} + \frac{7x+3y-5}{30} + \frac{2x-5y-3}{45}$.

31. $\frac{9x+2}{3} - \frac{7x+5}{4} - \frac{8-7x}{6} + \frac{5-3x}{8} - \frac{3-7x}{12}$.

32. $\frac{7a-3b}{4} + \frac{4a-5b}{6} - \frac{3a-8b}{9} + \frac{5a-6x}{18} - \frac{3b-8x}{24}$.

33. $\frac{5(2x-3)}{4} - \frac{2(7x-5)}{3} + \frac{4(3x+1)}{5}$.

34. $\frac{3(2a-3b)}{8} - \frac{2(3a-5b)}{2} + \frac{5(a-b)}{6}$.

35. $\frac{a-3b}{6a} + \frac{4a-b}{2b} + \frac{5a+3x}{9x} - \frac{a^2-bx}{2ax} - \frac{2a}{b}$.

36. $\frac{3a-5b}{15ab} - \frac{a-7c}{12ac} - \frac{5b-4c}{20bc} + \frac{3}{4a} + \frac{3}{5b} + \frac{4}{3c}$.

37. $\frac{6a+c}{6bc} - \frac{5a-4b}{4ac} - \frac{3b-5c}{5ab} + \frac{3}{5a} - \frac{1}{6b} + \frac{5}{4c}$.

38. $\frac{2}{3a} - \frac{1}{2b} - \frac{2a+3}{6a^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3a-2b}{6ab}$.

39. $\frac{1}{6a} + \frac{a-2b}{3ab} - \frac{3}{4b} - \frac{3a-4x^2}{8ax^2} + \frac{9}{8x^2} + \frac{5x^2-5b}{12bx^2}$.

40. $\frac{5a-2x}{10ax} - \frac{3b-4x}{12bx} + \frac{4a^2-5b}{20a^2b} - \frac{a^2-x}{4a^2x} - \frac{a-b}{5ab} + \frac{2}{3b}$.

41. $\frac{a(3b-2c)}{6bc} - \frac{b(4a-5c)}{10ac} + \frac{8a^2+3b^2}{6ab} - \frac{5a-4b}{10c}$.

42. $\frac{a(3x^2-2b)}{12bx^2} - \frac{b(5x^2-3a)}{15ax^2} + \frac{5a-6b}{30x^2} + \frac{a}{12b} + \frac{2b}{3a}$.

43. a) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$, b) $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$.

44. a) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$, b) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$.

45. a) $\frac{7}{a+b} - \frac{5}{a}$, b) $\frac{8}{a-1} - \frac{7}{a}$.

46. a) $\frac{x}{a+1} - \frac{x}{a-1}$, b) $\frac{2x}{a-1} - \frac{x}{a^2-1}$.

47. a) $\frac{6}{x+3} - \frac{5}{3}$, b) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{3x}$.

48. a) $\frac{3x-1}{1-3x} - \frac{2x-7}{7}$, b) $\frac{2x-1}{x-2} - \frac{2x-5}{x-4}$.

49. a) $\frac{5}{2(x-1)} - \frac{7}{3(x-1)}$, b) $\frac{8}{15(x-1)} + \frac{9}{10(x+1)}$.

50. a) $\frac{5}{3x-9} - \frac{8}{5x-15}$, b) $\frac{5}{4x-4} - \frac{7}{6x+6}$.

51. a) $\frac{ad+bc}{2cd(c-d)} + \frac{ad-bc}{2cd(c+d)}$, b) $\frac{2ax-3by}{2xy(x-y)} - \frac{2ax+3by}{2xy(x+y)}$.

52. $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}$.

53. $\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} - \frac{x+2}{x^2-1}$.

54. $\frac{5x+4}{x-2} - \frac{3x-2}{x-3} - \frac{x^2-2x-17}{x^2-5x+6}$.

55. $\frac{x-4}{2x-1} - \frac{3x-5}{x+2} + \frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2}$.

56. $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1+x} + \frac{3x+7}{x^2-1}$.

57. $\frac{8}{2x-3} + \frac{3}{3-2x} - \frac{3x-4}{2x^2-x-3}$.

58. $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+2}$.

59. $\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3}$.

60. $\frac{2}{2x-1} - \frac{9}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}$.

61. $\frac{7}{x-a} - \frac{4}{x-b} - \frac{3}{x-c}$.

62. $\frac{1}{x+a} + \frac{2}{x+b} - \frac{3}{x+c}$.

63. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x^2}$.

64. $\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$.

65. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{4}{x^2-1} - \frac{4}{(x^2-1)^2}$.

66. Weise nach, daß a) $\frac{a}{b} = c + \frac{a-bc}{b}$, b) $\frac{a}{b} = \frac{a+bc}{b} - c$ ist.

Gleichungen.

Löse folgende Gleichungen:

67. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 14$.

68. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x = 3$.

69. $\frac{3}{4}x - \frac{5}{9}x = 21$.

70. $\frac{4}{5}x + 9 = \frac{5}{4}x$.

71. $3\frac{1}{3}x - 2\frac{1}{2}x = 4\frac{1}{6}$.

72. $2\frac{1}{5}x + 11 = 5\frac{1}{2}x$.

73. $7\frac{1}{6}x - 12\frac{1}{3} = x$.

74. $7\frac{1}{8}x - 6\frac{6}{7}x = 30$.

75. $29\frac{1}{4}x + 14\frac{1}{3} = 32\frac{5}{6}x$.

76. $18\frac{2}{3}x - 49 = 5\frac{3}{5}x$.

77. $\frac{x}{a} - \frac{x}{3a} = 2$.

78. $\frac{5x}{7m} - \frac{3x}{5m} = 4$.

79. $\frac{a}{x} + b = \frac{b}{x} + a$.

80. $\frac{a}{x} + \frac{x-b}{x} - \frac{a-x}{x} = 1$.

81. $3\left(\frac{x}{5} - 3\right) = 5\left(\frac{x}{3} - 5\right)$.

82. $a\left(\frac{x}{2} - 5\right) - b\left(\frac{x}{5} - 2\right) = 0$.

83. $7\left(\frac{x}{a} - 1\right) = x\left(1 - \frac{a}{x}\right)$.

84. $a - \frac{x}{b} = \frac{x}{a} - b$.

85. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$.

86. $m\left(\frac{x}{a} - b\right) = n\left(\frac{x}{b} - a\right)$.

87. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x - \frac{5}{6}x + 2 = \frac{5}{12}x$.

88. $\frac{1}{2}x - 19 + \frac{3}{4}x + 18\frac{5}{6} = 27\frac{2}{3}x - 3\frac{7}{12} - 26\frac{1}{6}x - \frac{10}{3}$.

89. $15\frac{7}{8} - \frac{7}{8}x + 15\frac{1}{2}x - \frac{11}{12}x + 18\frac{5}{6} - 13\frac{5}{8}x = 22\frac{1}{3}$.

90. $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}x - 7\frac{3}{4} + 7\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{5} - 4\frac{1}{5}x - 5\frac{1}{3} + 5\frac{1}{3}x = 0$.

91. $\frac{9}{x} - 7\frac{1}{2} = \frac{7}{x} - \frac{2x-1}{3} + \frac{4x+1}{6}$.

92. $\frac{5x-3}{2x} - 1\frac{1}{3} - \frac{1}{x} = 3\frac{1}{4} - \frac{2x+1}{3x} - 2\frac{1}{2}$.

§ 14. Multiplikation und Division von Brüchen.

Multiplikation von Monomen.

1. a) $\frac{1}{4} \cdot 4$, b) $\frac{2}{3} \cdot 3$, c) $\frac{2}{5} \cdot 10$, d) $1\frac{1}{2} \cdot 2$.
2. a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$, c) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7}$, d) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{5}$.
3. a) $\frac{a}{7} \cdot 7$, b) $\frac{ab}{10} \cdot 10$ c) $\frac{2x}{9} \cdot 3$, d) $\frac{xy}{a} \cdot a$.
4. a) $4a \cdot \frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3} \cdot 9b$, c) $12c \cdot \frac{3}{4}$, d) $\frac{4}{5} \cdot 10c$.
5. a) $4 \cdot \frac{7}{8}x$, b) $3h \cdot 7\frac{5}{6}$, c) $8k \cdot 1\frac{1}{2}$, d) $5\frac{1}{4}p \cdot 14$
6. a) $\frac{2}{3}c \cdot 10$, b) $\frac{2}{3}c \cdot 7d$, c) $\frac{2}{3}d \cdot 7e$, d) $6x \cdot 2\frac{3}{4}$.
7. a) $\frac{3}{a} \cdot 2$, b) $\frac{a}{8} \cdot 4$, c) $\frac{a}{5b} \cdot 5$, d) $\frac{a}{12y} \cdot 8y$.
8. a) $a \cdot \frac{2x}{7ab}$, b) $2x \cdot \frac{3}{8xy}$, c) $4a \cdot \frac{5x}{6ab}$, d) $9x \cdot \frac{5a}{12bx}$.
9. a) $a \cdot \frac{a}{b}$, b) $5x \cdot \frac{a}{7a}$, c) $a \cdot \frac{1}{ax}$, d) $\frac{a}{x} \cdot ax$.
10. a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$, b) $\frac{3a}{4} \cdot \frac{5b}{6}$, c) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{a}$, d) $\frac{5x}{4} \cdot \frac{4x}{5}$.
11. a) $\frac{5ax}{6by} \cdot \frac{3x}{5y}$, b) $\frac{7}{a} \cdot \frac{5ax}{14by}$, c) $\frac{2ab}{7cd} \cdot \frac{5cx}{6by}$, d) $\frac{8ax}{5by} \cdot \frac{3ay}{4bx}$.
12. a) $\frac{7}{3}a \cdot 1\frac{1}{5}b$, b) $2\frac{1}{2}g \cdot 1\frac{3}{5}h$, c) $3\frac{1}{3}k \cdot 7\frac{1}{2}h$, d) $7\frac{1}{2}ay \cdot 1\frac{3}{5}ax$.
13. a) $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{3}{8}b$, b) $\frac{6x}{5y} \cdot \frac{2}{3}y$, c) $\frac{3a}{5x} \cdot \frac{1}{3}bx$, d) $\frac{5n}{4p} \cdot \frac{3}{5}px$.
14. a) $3\frac{1}{2}ab \cdot \frac{4a}{7bx}$, b) $1\frac{1}{3}ax \cdot \frac{6b}{xy}$, c) $\frac{8a}{15bx} \cdot 2\frac{1}{2}x$, d) $\frac{3a}{5y} \cdot 3\frac{1}{3}xy$.

Multiplikation von Polynomen.

15. a) $(ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{x}$, b) $(3x^3 - 7x^2 + 5x) \cdot \frac{2}{x^2}$.
16. a) $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 3\right) \cdot 5x^2$, b) $\left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}\right) \cdot 3x^3$.
17. a) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot \frac{ab}{c}$, b) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot xyz$.
18. a) $(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c) \cdot (+\frac{2}{3}x)$, b) $(-\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b - \frac{5}{6}c) \cdot (-2\frac{3}{5}y)$
19. a) $(1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}b + 3\frac{3}{4}c) \cdot 2\frac{2}{3}x$, b) $(2\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}y + 2\frac{2}{3}z) \cdot 1\frac{1}{2}a$.
20. a) $\left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)$, b) $(a - b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.
21. a) $\left(\frac{x}{y} - \frac{2}{3}\right) \cdot (3x + 2y)$, b) $\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{y}\right)$.
22. a) $(a + \frac{1}{2}b)^2$, b) $(2a - \frac{1}{4}b)^2$.
23. a) $(\frac{1}{2}a - 1)^2$, b) $(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y)^2$.
24. a) $(a + \frac{1}{2}) \cdot (a - \frac{1}{2})$, b) $(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}a) \cdot (\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}a)$.
25. a) $(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b) \cdot (\frac{2}{3}a + 4b)$, b) $(2\frac{1}{2}a - 5b) \cdot (5a + 1\frac{1}{2}b)$.
26. a) $(1\frac{1}{3}a - 2\frac{1}{2}x) \cdot (1\frac{1}{5}a + \frac{3}{4}x)$, b) $(1\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{3}y) \cdot (1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{5}y)$.

27. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(a-b)+(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$

28. $\left(\frac{3}{5}-\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{y}\right)-\left(\frac{3}{5x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(3-\frac{5x}{y}\right).$

29. $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{2x}{3}+1\right).$

30. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2x^2+\frac{3x}{2}+\frac{4}{3}\right).$

31. $\left(\frac{2a^2}{9b}-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3b}+\frac{1}{a}\right).$

32. $\left(\frac{5a}{3b}+\frac{3b}{4a}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{3a}{b}+\frac{3}{2}\right).$

33. $\left(\frac{3x}{4y}+\frac{2y}{5x}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{y}-\frac{2}{x}\right).$

34. $\left(\frac{3a^2}{2bx}+\frac{2a}{y}+\frac{8bx}{3y^2}\right)\cdot\left(\frac{3a}{x}-\frac{4b}{y}\right).$

35. $\left(\frac{a}{b}+\frac{5b}{2a}-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}+\frac{2b}{5}\right).$

36. $\left(\frac{3ay}{4x}-\frac{2b^2x}{3ay}-\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(\frac{3a}{b}+\frac{2x}{y}\right).$

Division von Monomen.

37. a) $\frac{3}{4}:3$, b) $2\frac{1}{2}:5$, c) $\frac{1}{3}:2$, d) $\frac{1}{2}:3$.

38. a) $\frac{3}{7}:2$, b) $\frac{4}{9}:2$, c) $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{8}:\frac{2}{3}$.

39. a) $\frac{2}{3}:\frac{6}{7}$, b) $2\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$, c) $1\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$, d) $\frac{2}{5}:3\frac{3}{4}$.

40. a) $2a:\frac{1}{2}$, b) $3x:\frac{3}{2}$, c) $6b:\frac{2}{3}$, d) $8y:\frac{4}{5}$.

41. a) $3a:1\frac{1}{2}$, b) $7c:1\frac{2}{5}$, c) $5x:1\frac{7}{8}$, d) $\frac{1}{2}ab:1\frac{1}{2}$.

42. a) $9:\frac{3}{a}$, b) $a:\frac{a}{x}$, c) $ab:\frac{a}{b}$, d) $a^2:\frac{a}{b}$.

43. a) $9x:\frac{12ax}{5b}$, b) $8a:\frac{20ab}{3x}$, c) $15n:\frac{5nx}{3y}$, d) $18p:\frac{9p}{5x}$.

44. a) $\frac{a}{x}:\frac{b}{x}$, b) $\frac{a}{b}:\frac{a}{x}$, c) $\frac{7}{a}:\frac{1}{a}$, d) $\frac{a}{b}:\frac{a}{3b}$.

45. a) $1\frac{1}{2}ab:2\frac{1}{4}a$, b) $3\frac{1}{3}ax:2\frac{1}{2}x$, c) $3\frac{3}{4}xy:1\frac{2}{3}y$, d) $8\frac{1}{3}ay:1\frac{2}{3}a$

46. a) $\frac{3ab}{7xy}:\frac{2ab}{7by}$, b) $\frac{ax}{by}:\frac{3ab}{5xy}$, c) $\frac{2x}{3y}:\frac{7bx}{9ay}$, d) $\frac{8a}{9b}:\frac{5ax}{6by}$.

47. a) $\frac{5ab}{6xy}:\frac{a}{2x}$, b) $\frac{16abc}{9xyz}:\frac{8b}{3z}$, c) $\frac{24mnx}{35pqy}:\frac{8m}{5y}$.

48. a) $\frac{27npx}{10gh}:\frac{3p}{5h}$, b) $\frac{8ac}{9b}:\frac{6ay}{5b}$, c) $\frac{14ax}{15p}:\frac{21am}{10by}$.

49. a) $\frac{18mx}{5y}:4ax$, b) $\frac{6np}{5x}:12py$, c) $\frac{27pq}{10c}:18qx$.

50. a) $6ab:\frac{9ax}{5m}$, b) $4am:\frac{8mx}{3y}$, c) $20ax:\frac{15xy}{7b}$.

51. a) $\frac{2}{3}xy : \frac{6ax}{5by}$, b) $7\frac{1}{2}ab : \frac{5ax}{6y}$, c) $9\frac{3}{4}mn : \frac{13mx}{2ny}$.

52. a) $\frac{8mb}{9ax} : \frac{4}{3}bx$, b) $\frac{16xy}{21pq} : 5\frac{1}{3}px$, c) $\frac{14mx}{15py} : 17\frac{1}{2}my$.

53. a) $\frac{6afmx}{5bcy} : \frac{9fnx^2}{10cy^2}$, b) $\frac{5afx}{2bc} : \frac{3fx^2}{4cdn}$, c) $\frac{27anx}{28bpy} : \frac{18abx}{35npy}$.

54. a) $\frac{9a^2b}{8cx^2} : \frac{15ab^2}{4xy^2}$, b) $\frac{a-x}{5a} : \frac{a+x}{10x}$, c) $\frac{m-x}{15mp} : \frac{m-x}{10px}$.

55. a) $\frac{x+3}{3x} : \frac{5x}{x-5}$, b) $\frac{6ab}{a+b} : \frac{8ax}{a-b}$.

56. a) $\frac{2(m-1)}{(a-1)x} : \frac{3(1-m)}{(a+1)x}$, b) $\frac{5a(m-z)}{3mz} : \frac{10b(z-m)}{9mx}$.

Division von Polynomen.

57. a) $\left(\frac{a^2d}{bc^2} - \frac{a}{b} + \frac{d}{c}\right) : \frac{ad}{bc}$, b) $\left(\frac{3ab}{2xy} - \frac{4a}{3x} + \frac{5b}{4y}\right) : \frac{5by}{6ax}$.

58. a) $\left(\frac{xyz}{abc} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) : \left(-\frac{xy}{ab}\right)$, b) $\left(\frac{5a}{3bc} - \frac{3b}{2ac} + \frac{4c}{3ab}\right) : \frac{6}{abc}$.

Rechenvorteil. — Grenzwert.

59. Beweise die Formel $\frac{a-1}{a} \cdot b = b - 1 + \frac{a-b}{a}$.

60. Berechne nach dieser Formel a) $\frac{5432}{5433} \cdot 212$, b) $\frac{3297}{3298} \cdot 725$, c) $\frac{2513}{2514} \cdot 27$.

61. Laß in a) $\frac{1}{x}$, b) $\frac{5}{x}$, c) $\frac{1000000}{x}$ den Nenner x die Werte 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ usf. durchlaufen und bestimme jeweilig den Wert des Bruches. d) Welcher Grenze nähert sich der Wert eines Bruches, wenn sich der Nenner der Grenze 0 nähert? e) Was ist über einen Bruch zu sagen, in dem sich Zähler und Nenner der Grenze 0 nähern?

Quotienten von Polynomen.

Vereinfache die folgenden Quotienten:

62. a) $\frac{\frac{8}{5}-1}{2-\frac{3}{5}}$, b) $\frac{2-\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}+4}$, c) $\frac{11+\frac{7}{10}}{\frac{43}{15}-2}$.

63. a) $\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{9}}{\frac{16}{9}-\frac{1}{3}}$, b) $\frac{\frac{5}{12}-\frac{3}{8}}{\frac{17}{12}+\frac{7}{8}}$, c) $\frac{\frac{7}{10}+\frac{12}{25}}{\frac{9}{10}+\frac{7}{25}}$.

64. a) $\frac{2+\frac{3}{5}+\frac{4}{25}}{4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}}$, b) $\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}{\frac{17}{5}-\frac{5}{4}+\frac{4}{3}}$, c) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$.

65. a) $\frac{\frac{u}{v}+2}{\frac{3u}{v}-2}$, b) $\frac{\frac{a}{6}+\frac{6}{a}}{\frac{a}{2}-\frac{2}{a}}$, c) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$.

66. a) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$, b) $\frac{\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$, c) $\frac{\frac{x+1}{y}-\frac{y+1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}$.

67. a) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$, b) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$; c) $\dfrac{\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$.

68. a) $\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, b) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$.

69. a) $\dfrac{a-b}{a+b}:\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}$, b) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}:\dfrac{a-b}{a+b}$.

70. a) $\dfrac{1}{u^2-8u+15}:\dfrac{1}{u^2-u-6}$, b) $\dfrac{4}{a^2-ab-2b^2}:\dfrac{3}{a^2+3ab-15b^2}$

71. $\dfrac{a-b}{a^2-2ab-3b^2}:\dfrac{a^2+2ab-3b^2}{a+b}$.

72. $\dfrac{u^2+uv-6v^2}{u-3v}:\dfrac{u-2v}{u^2-uv-6v^2}$

73. a) $\left(\dfrac{a}{2x}-\dfrac{2x}{a}\right):\left(\dfrac{2x}{a}+1\right)$, b) $\left(\dfrac{3a}{2b}-\dfrac{2b}{3a}\right):\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}\right)$.

74. a) $\left(\dfrac{5a^2}{b}-\dfrac{16b}{5}\right):(5a+4b)$, b) $\left(\dfrac{5a}{7b}-\dfrac{7b}{5a}\right):\left(\dfrac{7}{a}+\dfrac{5}{b}\right)$.

75. $(2x^4-\frac{53}{45}x^3+\frac{41}{20}x^2-\frac{19}{10}x+\frac{3}{8}):\left(\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{4x}{3}+\frac{1}{4}\right)$.

76. $\left(\dfrac{9x^4}{10}-3\frac{211}{360}x^2+\frac{21}{4}x-4\frac{1}{2}\right):\left(\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{5x}{3}-6\right)$.

77. $\left(\dfrac{10a}{9b^2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{a}-\dfrac{9b}{5a^2}\right):\left(\dfrac{5}{b}-\dfrac{3}{a}\right)$.

78. a) Beweise die Formel $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}=\dfrac{a}{b}$; b) bilde den Ausdruck für $a=5$, $b=12$; c) $a=6$, $b=11$.

79. a) Berechne $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a}{b}\,\frac{a-b}{a+b}}$. b) Wie lautet der Ausdruck für $a=2$, $b=5$, c) für $a=120$, $b=119$?

Berechne die folgenden sogenannten Kettenbrüche:

80. a) $\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$ b) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ c) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$

81. a) $\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}$ c) $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}}$

Gib die aufeinanderfolgenden Näherungswerte folgender Kettenbrüche an:

82. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$ 83. $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}$ 84. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}}$

§ 15. Proportionen.[1])

Proportion und Produktengleichung.

1. Welche Gleichung entsteht aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ durch Multiplikation mit bd?

Bilde die Produktengleichung folgender Proportionen:

2. $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$.
3. $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$.
4. $\frac{2a}{3b}=\frac{p}{q}$.
5. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$.

Prüfe mit Hilfe der Produktengleichung, welche von den nachfolgenden Gleichungen richtig, welche falsch sind:

6. $\frac{17}{23}=\frac{323}{437}$.
7. $\frac{13}{19}=\frac{221}{323}$.
8. $\frac{41}{31}=\frac{697}{527}$.
9. $1\frac{8}{29}=1\frac{184}{667}$.
10. $\frac{a^3-b^3}{a^3+2a^2b+ab^2+b^3}=\frac{a-b}{a+b}$.
11. $\frac{a^4-b^4}{a^4-2a^2b^2+b^4}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.
12. $\frac{a^4+a^2b^2-a^2b^3+b^6}{b^4+a^2b^2-a^3b^2-a^6}=\frac{a^2-b^3}{b^2-a^3}$.

Bilde von folgenden Proportionen die Produktengleichung, und bestimme dann die Unbekannte x:

13. $51:15=68:x$.
14. $20:95=x:57$.
15. $x:10{,}4=115:18\frac{2}{5}$.
16. $4{,}125:x=3\frac{1}{7}:26\frac{2}{3}$.
17. $7ab:5bc=3\frac{1}{2}a:x$.
18. $8ab:x=bc:1\frac{3}{4}ac$.
19. $x:\frac{a}{c}=\frac{c}{d}:\frac{a}{b}$.
20. $\frac{a}{b}:x=\frac{c}{d}:\frac{b}{d}$.
21. $\frac{a}{14b}:x=\frac{3c}{7b}:\frac{2c}{a}$.
22. $\frac{a+b}{a-b}:\frac{a^2-b^2}{ab}=x:\frac{(a-b)^2}{ac}$.
23. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}-ab\right):\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}+ab\right)=1:x$.
24. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}+ab\right):\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right)=(a+b)^2:x$.
25. Suche die vierte Proportionale zu: a) 3, 4, 6; b) 6, 21, 22; c) 2, $4\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{3}$; d) $3\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$; e) a, b, c.

---

1) Siehe auch § 12, Aufg. 176 bis 187 und Aufg. 195 bis 210.

26. Welche Proportion folgt aus $x \cdot y = u \cdot v$ durch Division durch $y \cdot u$?

27. Schreibe folgende Produktengleichungen in Proportionsform:

a) $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$, b) $9 \cdot 8 = 3 \cdot 24$,

c) $a_1 \cdot a_2 = a_3 \cdot a_4$, d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{p} \cdot \frac{p}{c}$.

28. Liefert auch die Produktengleichung $0 \cdot 7 = 0 \cdot 8$ eine Proportion?

29. Stelle alle Proportionen zusammen, die aus den folgenden Produktengleichungen sich ableiten lassen:

a) $18 \cdot 5 = 9 \cdot 10$, b) $x \cdot y = u \cdot v$.

30. Welche anderen Proportionen folgen aus

a) $2 : 3 = 10 : 15$, b) $a : b = c : d$.

Gib in allen Fällen als Probe die Produktengleichung an.

Gesetz der korrespondierenden Addition und Subtraktion.

31. Es sei $a : b = c : d$. Beweise, daß dann auch

a) $(a + b) : b = (c + d) : d$,

b) $(a - b) : b = (c - d) : d$

ist, und bilde Beispiele dafür mit den Werten

c—d) $a = 2$, $b = 3$, $c = 10$, $d = 15$;

e—f) $a = 18$, $b = 9$, $c = 10$, $d = 5$.

32. Welche anderen Formen können die Proportionen in Aufg. 31 a und b noch annehmen?

Benutze das Gesetz der korrespondierenden Addition und Subtraktion bei der Bestimmung der Unbekannten x in folgenden Proportionen:

33. $(9 + x) : x = 4 : 1$. **34.** $(10 - x) : x = 4 : 1$.

35. $(15 + x) : x = 4 : 1$. **36.** $(a + x) : x = (a + 1) : 1$.

37. $(b + x) : x = a : b$. **38.** $(a - x) : x = a : b$.

Proportion und Proportionalitätsfaktor.

39. Wenn $a : b = c : d$ ist, so kann man den Proportionalitätsfaktor t so bestimmen, daß $a = t \cdot c$, $b = t \cdot d$ ist. Bestimme den Proportionalitätsfaktor für die folgenden Proportionen:

a) $10 : 12 = 5 : 6$, b) $12 : 16 = 3 : 4$,

c) $2 : 3 = 2a : 3a$, d) $1 : 2 = 7 : 14$.

Bestimme in folgenden Proportionen erst den Proportionalitätsfaktor und dann x:

40. $2 : 5 = 4 : x$. **41.** $a : b = a^2 : x$.

42. $a : b = 1 : x$. **43.** $m : n = x : n^2$.

44. $m : 2n = x : n^2$. **45.** $5 : m = x : 5m$.

46. $a^2 : b^2 = 1 : x$. **47.** $a^2 : b^2 = x : 1$.

48. Beweise die in Aufg. 31 ausgesprochenen Gesetze der korrespondierenden Addition und Subtraktion mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors.

49. a) Beweise mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors, daß aus

$$a : b = c : d$$

das Gesetz folgt:

$$(pa + qb) : (ra + sb) = (pc + qd) : (rc + sd),$$

wo p, q, r und s irgendwelche Zahlen sind. **b)** Sprich das Gesetz aus, wenn insbesondere $p = q = r = 1$, $s = -1$ ist.

50. Wenn $a : b = c : d$ ist, so kann man $a = \frac{s}{d}$ setzen. Dann ist auch $b = \frac{s}{c}$. Beweise das. Welchen Wert hat s in den folgenden Proportionen:

a) $10 : 12 = 5 : 6$, **b)** $12 : 16 = 3 : 4$,
c) $2 : 3 = 2a : 3a$, **d)** $1 : 2 = 7 : 14$.

51. Fasse die folgenden zwei Proportionen in eine zusammen:

a) $3 : 4 = 12 : 16$, $3 : 4 = 18 : 24$, **b)** $1 : 2 = a : 2a$, $1 : 2 = \frac{ab}{2} : ab$,
c) $a : b = c : d$, $a : b = e : f$, **d)** $x : y = 7 : 8$, $a : b = x : y$.

52. Zerlege die fortlaufenden Proportionen

a) $A : B : C = 1 : 2 : 3$, **b)** $10 : 15 : 20 = 30 : 45 : 60$,
c) $a : 2a : 3a = b : 2b : 3b$.

in je zwei einzelne. **d—f)** Wie lautet in jedem Falle der Proportionalitätsfaktor?

Suche die mit $A : B : C$ beginnende fortlaufende Proportion und den Proportionalitätsfaktor, wenn gegeben ist:

53. a) $A : B = 3 : 7$, $A : C = 4 : 5$, **b)** $A : B = 6 : 5$, $A : C = 9 : 7$.
54. a) $A : B = 8 : 7$, $C : A = 11 : 12$, **b)** $A : B = 5 : 4$, $B : C = 2 : 3$.
55. a) $A : B = 8 : 9$, $C : B = 7 : 12$, **b)** $A : C = 8 : 9$, $B : C = 5 : 6$.

Anwendungen aus der Verteilungsrechnung.

56. 5 Kinder sollen 240 Äpfel so unter sich verteilen, daß die Anteile sich wie $1 : 2 : 3 : 4 : 5$ verhalten. Wieviel erhält jedes?

57. Im Münzgold verhält sich der Kupfergehalt zu dem Gehalt an Feingold wie $1 : 9$. Wieviel Gramm Kupfer sind in einem Zwanzigmarkstück? [Das Zwanzigmarkstück wiegt 7,965 Gramm.]

58. Zwei goldene Ringe wiegen je $6\frac{1}{2}$ Gramm, bei dem einen ist das Verhältnis des Feingoldes zum Gesamtgewicht $333 : 1000$, bei dem andern $585 : 1000$. Wieviel Feingold enthält jeder Ring?

59. Ein deutsches Markstück hat ein Gewicht von $5\frac{5}{9}$ g und 900 Feingehalt, ein österreichisches Kronenstück hat ein Gewicht von 5 g und 835 Feingehalt. Wieviel Feinsilber enthält das Markstück mehr?

60. Unter zwei Personen sind 217 ℳ so zu verteilen, daß sich die Anteile wie $3 : 4$ verhalten. Wieviel erhält jeder?

61. An einem Unternehmen ist A mit 10000 ℳ, B mit 12000 ℳ, C mit 30000 ℳ beteiligt. Der Reingewinn von 7800 ℳ soll der Beteiligung entsprechend verteilt werden. Wieviel erhält jeder?

Anwendungen aus der Zinsrechnung[1])

62. Die einfachen Zinsen eines zu $p\%$ auf n Jahre ausgeliehenen Kapitals betragen

$$z = \frac{k \cdot p \cdot n}{100}.$$

a) Welchen Größen ist z proportional? Löse die Gleichung nach **b)** k, **c)** p, **d)** n auf und gib jeweilig an, welchen Größen k, p, n proportional und welchen umgekehrt proportional ist.

63. Jemand hat zwei Kapitalien ausstehen, eins zu $5\frac{1}{2}\%$ $1\frac{3}{4}$ Jahr, das andere zu $5\frac{1}{4}\%$ 1 Jahr 10 Monate. Beide bringen in der genannten Zeit gleichviel Zinsen. Wie verhalten sich die Kapitalien?

64. Ein Kapital, das zu $4{,}6\%$ ausgeliehen ist, bringt in einer gewissen Zeit 828 ℳ Zinsen, ein gleiches Kapital bringt bei $5\frac{1}{2}\%$ in einem anderen Zeitraum 792 ℳ Zinsen. Wie verhalten sich die Zeiträume?

65. Zwei Kapitalien A_1 und A_2 stehen gleichlange auf Zinsen. A_1 bringt bei $p_1\%$ c_1 ℳ Zinsen, A_2 bei $p_2\%$ in derselben Zeit c_2 ℳ. Wie verhalten sich **a)** die Kapitalien, **b)** die Zinsen, **c)** die Prozentsätze?

66. Ein Kapital A_1 bringt in n_1 Jahren c_1 ℳ Zinsen, ein anderes A_2 bringt bei demselben Prozentsatz in n_2 Jahren c_2 ℳ. Wie verhalten sich **a)** die Kapitalien, **b)** die Zeiten, **c)** die Zinsen?

67. Ein Kapital A_1 steht n_1 Jahre lang zu $p_1\%$ aus, ein anderes A_2 steht n_2 Jahre zu $p_2\%$. Beide geben denselben Zinsertrag. Wie verhalten sich **a)** die Kapitalien, **b)** die Zeiten, **c)** die Prozentsätze?

Anwendungen aus der Geometrie[2])

68. Die langen Seiten zweier flächengleichen Rechtecke verhalten sich wie 57 : 76; wie verhalten sich die kurzen?

69. Eine Strecke von 80 cm ist innerlich in dem Verhältnis **a)** 11:5, **b)** 12:13, **c)** 5 : 7, **d)** 7 : 8, **e)** $m : n$ geteilt. Wie groß sind die beiden Teile?

70. a—e) Führe dieselben Teilungen wie in Aufgabe 69 an der Strecke a aus.

71. Teile eine Strecke von 1 m nach dem Verhältnis von **a)** 3 : 8 : 9, **b)** 5 : 6 : 13, **c)** $u : v : w$.

72. Eine Strecke von 18 cm sei nach dem Verhältnis 8 : 5 äußerlich geteilt; wie lang fallen die Teile aus?

73. Die Strecke a sei im Verhältnis $u : v$ äußerlich geteilt; welche Größe erhalten die Teile?

74. Die Grundlinien zweier flächengleichen Dreiecke verhalten sich wie 7 : 10. Wie verhalten sich die zu diesen Grundlinien gehörigen Dreieckshöhen?

75. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4 : 5. Wie verhalten sich die Seiten?

76. Die drei Seiten eines Dreiecks sind 36 mm, 48 mm und 72 mm lang. Wie verhalten sich die drei entsprechenden Höhen?

---

1) In allen Aufgaben dieses Abschnittes sind nur einfache Zinsen zu nehmen.

2) In diesen Aufgaben werden Sätze aus der Flächenlehre und der Ähnlichkeitslehre vorausgesetzt.

77. Wie lang ist im Dreieck mit den Seiten a, b und c der Durchmesser des zur Seite c gehörenden Apollonischen Halbkreises?

78. Ein Dreieck hat eine Grundlinie von 28 cm Länge, parallel zu ihr geht eine Gerade, deren zwischen die beiden anderen Seiten fallendes Stück 21 cm lang ist. Nach welchem Verhältnis werden diese Seiten durch die Gerade geteilt?

79. Man kann die Höhe eines Turmes, eines Baumes messen, indem man aus der unbekannten Größe, aus der Länge des Schattens, aus der bekannten Höhe einer Stange und deren Schatten eine geeignete Proportion aufstellt. Eine 4 m hohe Stange wirft einen 6 m langen Schatten. Wie hoch ist ein Baum, dessen Schatten zur gleichen Zeit **a)** 36 m, **b)** 40 m, **c)** a m lang ist?

80. Welche Länge hat die Darstellung einer Strecke von 1 km, von a km **a)** auf der Generalstabskarte (Maßstab 1 : 100000), **b)** auf einem Meßtischblatt (Maßstab 1 : 25000), **c)** auf einer Karte im Maßstabe 1 : 2000000?

81. In eine Reliefkarte sollen die Höhenunterschiede des Geländes in der Überhöhung 1 : 5 dargestellt werden. Die Karte ist im Maßstab 1 : 10000 hergestellt. Wie hoch sind drei Berge von 80 m, 120 m, 150 m wirklicher Höhe darzustellen?

Anwendungen aus der Physik.

82. Drei Wellräder sind so miteinander verbunden, daß immer die Welle des einen mit dem Rade des folgenden im Eingriff steht. Die Radien des Rades verhalten sich zu denen der Welle im ersten Falle wie 10 : 1, im zweiten wie 9 : 1, im dritten wie 8 : 1. Welcher Kraftgewinn wird durch diese Übersetzung erzielt?

83. Wenn zwei Orte, an denen die Barometerstände B und β herrschen, einen Höhenunterschied von h m aufweisen, so gilt für Hohenunterschiede, die nicht über 900 m hinausgehen, mit großer Annäherung die Proportion

$$h : 16000 = (B - \beta) : (B + \beta).$$

Um wieviel m liegt demnach ein Ort mit einem mittleren Barometerstande von **a)** 702 mm höher als ein anderer mit 738 mm, **b)** von 712 mm höher als ein anderer mit 728 mm?

84. Welche Meereshöhe hat ein Berg, auf dessen Spitze das Barometer auf 680 mm steht (vergl. Aufg. 83)?

85. Wie hoch steht das Barometer bei 600 m Meereshöhe (vergl. Aufg. 83)?

86. In den Endpunkten eines ungleicharmigen Hebels wirken parallelgerichtete Gewichte derart, daß der Hebel im Gleichgewicht ist. Wie verhalten sich die Gewichte, wenn die Hebelarme **a)** 20 cm und 30 cm, **b)** a und b sind? Wie groß muß das in dem Endpunkt des Hebelarmes **c)** von 30 cm Länge, **d)** von der Länge a angreifende Gewicht sein, um einem am anderen Hebelarm angreifenden Gewicht von 3 kg das Gleichgewicht zu halten?

87. Ein Strom hat die Stromstärke 1 Amp., wenn er in einer Minute ungefähr 10,5 ccm Knallgas entwickelt. Nun verhalten sich die abgeschiedenen Mengen von Sauerstoff und Wasserstoff wie 1 : 2. Wieviel Wasserstoff und wieviel Sauerstoff wird also in einer Minute von einem Strom von 1 Amp. entwickelt?

88. Ein Wasserstoffmolekül hat einen Durchmesser von 0,1 $\mu\mu$, ein Blutkörperchen von 7000 $\mu\mu$, ein Milzbrandbazillus hat eine Länge von 10000 $\mu\mu$, wo 1 mm = 1000000 $\mu\mu$ ist. Man stellt das Wasserstoffmolekül durch einen Punkt von 0,3 mm dar. **a)** Welchen Durchmesser hätte beim gleichen Maßstab ein Blutkörperchen, welche Länge der Milzbrandbazillus. **b)** Wie hoch wäre bei einer Vergrößerung im gleichen Maßstab der Eiffelturm (300 m)?

Fünftes Kapitel.

Gleichungen ersten Grades.[1]

§ 16. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.[2]

Gleichungen mit bestimmten ganzen Zahlen als Koeffizienten.

1. $x + 3 = 7.$
2. $x - 3 = 8.$
3. $4 = 9 - x.$
4. $5x - 3 = 17.$
5. $2x + 7 = 13.$
6. $1 = 7 - 6x.$
7. $19 - x = 100 - 10x.$
8. $5x + 2 + x = 20.$
9. $7 = 7 - 3x + x.$
10. $18 + 8x = 27 + 5x.$
11. $31 - 7x = 41 - 8x.$
12. $7x - 7 = 17 - x.$
13. $5x - 16 = 19 - 2x.$
14. $31 = 111 - x - 7x.$
15. $9x + 22 - 2x = 100 - 11x - 42.$
16. $30x + 39 - 35x = 47 - 20x - 8.$
17. $8x - 7 + x = 9x - 3 - 4x.$
18. $7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 5.$
19. $0 = 14 + x - 8x - 3x - 6 + x.$
20. $9x + 12 - 6x - 13 + 2x = 8.$
21. $9x = 7x + 15 + 5x + 8 - 10x.$
22. $2x - 9 + 8x + 10 = 15 + 5x - 7.$
23. $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x = -4$
24. $-8 = 7 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1$
25. $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 2 = 0.$
26. $x - 3 + 6x - 9 + 12x - 15 = x.$
27. $3x + 2 + 5x + 3 + 7x + 9 = x.$
28. $7 - 5x + 10 + 8x - 7 + 3x = x.$
29. $6 + 12x - 9 - 8x + 10 + x = 0.$
30. $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x.$
31. $13 + 12x + 11 - 10x = 10x - 11 - 12x - 13.$

Einfache Klammern.

32. $3x + (7 - x) = 11.$
33. $x - (8 - x) = 10.$
34. $5(x - 5) = x - 9.$
35. $0 = 4(10 - 2x) - 3(x - 5).$

---

1) In diesem Kapitel werden nicht nur Gleichungen ersten Grades behandelt, sondern auch andere, deren Lösung auf Gleichungen ersten Grades führt.

2) Vgl. folgende Aufgaben aus früheren Abschnitten: § 5, Aufg. 82 bis 104; § 6 Aufg. 83 bis 88; § 7, Aufg. 33 bis 65; § 10, Aufg. 59 bis 72; § 11, Aufg. 114 bis 134; § 13, Aufg. 67 bis 96; § 15, Aufg 13 bis 25, 33 bis 38, 40 bis 47.

Die Aufgaben dieses Paragraphen dienen auch zur Wiederholung der Rechenregeln, die in den vorangegangenen Abschnitten behandelt sind.

36. $0 = 3(9 - 2x) - 5(2x - 9)$.
37. $7(4x - 3) + 3(7 - 8x) = 1$.
38. $8(3x - 2) - 7x - 5(12 - 3x) = 13x$.
39. $7(3x - 6) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 11$.
40. $6x - 7(11 - x) + 11 = 4x - 3(20 - x)$.
41. $(x - 5)(x + 3) - (3x - 4) = (x - 1)^2$.
42. $(x - 3)(x + 2) - 3(2x - 3) = (x - 6)^2 + 2$.
43. $(7x - 5)(7 - 3x) - (6 - 5x)(3x - 7) = (3x - 7) \cdot (7 - 2x)$.
44. $(x - 3)(2x - 5) - 4(x - 2) = 2(x - 1)^2 - 12$.
45. $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 + (2x - 9)^2 = (x - 6)(6x - 7)$.
46. $(2x + 1)^2 + (3x + 1)^2 + (8x - 3)^2 = (7x - 2)(11x - 1)$.
47. $(8 - 3x)^2 + (5 - 4x)^2 - 6 = (9 - 5x)^2 + 20x - 4$.

Gleichungen mit bestimmten gebrochenen Zahlen als Koeffizienten.[1])

48. a) $\frac{x}{7} = 4$, b) $\frac{1}{2}x = 7$.
49. a) $\frac{x}{5} + 8 = 13$, b) $\frac{x}{3} - 5 = 16$.
50. a) $x : 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, b) $x : (-3\frac{1}{3}) = 2\frac{1}{10}$.
51. a) $x : 0{,}925 = 120$, b) $x : 0{,}175 = 4{,}44$.
52. a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$, b) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x$.
53. $2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$.
54. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 11$.
55. $x - \frac{3x}{2} + 9 = \frac{2x}{3} + 4 + \frac{5x}{6} - \frac{6x}{5} + \frac{1}{5}$.
56. $x = 2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{5}x + 1$.
57. $2\frac{2}{3}x + \frac{x}{3} = 2\frac{1}{2} + x - 4\frac{1}{5}x + 5\frac{1}{4}$.
58. $\frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x = x + 1 + \frac{1}{18}x - 2\frac{1}{6}x + 1\frac{2}{3}x + 18$.
59. $5x - 2 = \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}x + \frac{11}{12}x + \frac{14}{15}x$.
60. $x = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x$.
61. $2x - 3 = 2{,}25x - 5 - 0{,}4x + 2{,}6$.
62. $44x - 32 = 84 + 31{,}5x + 4{,}2x + 16{,}8$.
63. $0 = 0{,}75x - 2x - 0{,}6x + 0{,}5x - 9$.
64. $0{,}617x - 0{,}617 = 12{,}34 - 1{,}234x$.
65. $44{,}44x = 2222 + 222{,}2 + 22{,}22 + 2{,}222$.
66. $\frac{2}{3}(7x - 10) - \frac{1}{2}(50 - x) = 20$.

1) Vgl. auch die Aufg. 89 bis 95 in § 30.

67. $5 = 3x + \frac{2}{5}(x + 3) - \frac{1}{2}(11x - 37).$

68. $\frac{2}{3}(3x - 5) - 1 = \frac{2}{3}(11 - 2x) + x.$

69. $1 - 3(7\frac{1}{2} + x) + 7(\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}) + \frac{8}{3}x = 0.$

70. $0 = 2x - 3(5 + \frac{3}{4}x) + \frac{2}{3}(4 - x) - \frac{1}{4}(3x - 16).$

71. $3 - \frac{3 - 7x}{10} + \frac{x + 1}{2} = 4 - \frac{7 - 3x}{5}.$

72. $\frac{4x - 1}{3} - 4 = 1 - \frac{x - 4}{6} + \frac{3x + 5}{4} - 4\frac{1}{4}.$

73. $\frac{5x - 6}{10} - \frac{9 - 10x}{14} = \frac{3x - 4}{5} - \frac{3 - 4x}{7}.$

74. $\frac{7x - 1}{25} - \frac{x + 3}{20} = \frac{4x + 9}{10} - \frac{x + 5}{5}.$

75. $\frac{x - 3}{7} - \frac{x - 25}{5} = 7 - \frac{2 + x}{4}.$

76. $\frac{7x - 2}{3} - \frac{4}{5}(x + 3) + 6 = \frac{3(x + 2)}{2}.$

77. $11 - \left(\frac{3x - 1}{4} + \frac{2x + 1}{3}\right) = 10 - \left(\frac{2x - 5}{3} + \frac{7x - 1}{8}\right).$

78. $\frac{3x + 3}{2} - \left(\frac{x + 1}{6} + 3\right) = \frac{5x + 2}{3} - \left(\frac{3x - 1}{2} - 3\right).$

79. $3x - \frac{2x + 5}{7} = 16 - \frac{7x + 19}{2} - \frac{2x + 1}{3}.$

80. $\frac{2x - 1}{2} + \frac{3x - 2}{4} + \frac{5x - 4}{8} = 1 - \frac{7x - 6}{8}.$

81. $\frac{13x + 5}{2} - \frac{16x + 5}{3} = \frac{11x + 4}{3} - \frac{5x - 1}{2} - x.$

Bruchgleichungen mit zahlenmäßig gegebenen Koeffizienten.

82. $\frac{5}{x} = 9$

83. $\frac{5}{6} = \frac{3}{4} : x.$

84. $\frac{12}{x} + 5 = 8.$

85. $\frac{15}{x} + 7{,}5 = 15.$

86. $15 : (-x) = 3.$

87. $18 : (-x) + 8 = 0.$

88. $\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}.$

89. $\frac{7}{x} + \frac{1}{3} = \frac{23 - x}{3x} + \frac{7}{12} - \frac{1}{4x}.$

90. $\frac{7}{3} + \frac{13}{5x} = \frac{13x - 24}{3x} - \frac{37}{20} + \frac{10}{x}.$

91. $\frac{2}{x + 5} = \frac{1}{3}.$

92. $\frac{10}{x - 2} = 2.$

93. $\frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x + 1}.$

94. $\frac{2}{x - 3} = \frac{3}{x - 2}.$

95. $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{7(x + 1)} = \frac{2}{x + 9}.$

96. $\frac{1}{2x + 5} = \frac{1}{8x + 3}.$

97. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-5}{x-3}$. 98. $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}$.

99. $\frac{7x+26}{x+21}-\frac{17+4x}{21}=\frac{10-x}{3}+\frac{13+x}{7}$.

100. $\frac{1-x}{3}+\frac{3-x}{5}=\frac{6x+5}{8x-15}-\frac{1+8x}{15}$.

101. $\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+3)}=\frac{5}{x+3}+\frac{3}{2(x+3)}$.

102. $3-\frac{1}{6(2x-5)}=\frac{1}{2(2x-5)}+\frac{7}{3(2x-5)}$.

103. $1=\frac{2x+1}{3x-15}-\frac{x-11}{2x-10}$.

104. $\frac{5x-7}{4x+4}+\frac{x+3}{3x+3}=1$

105. $3-\frac{3x-5}{5x-5}+\frac{5x-1}{7x-7}+\frac{x-4}{x-1}=2$.

106. $\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}+\frac{x+99}{x^2+3x+2}=10$

107. $\frac{3x-5}{3(x-1)}-\frac{2x-7}{2(x+1)}=\frac{19x-3}{6(x^2-1)}$.

108. $\frac{5(2x^2-1)}{2x+3}-\frac{7x+2}{2x-3}=5x-11$.

109. $\frac{5(2x^2+3)}{2x-1}-\frac{7x-12}{2x-7}=5x-1$.

110. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=\frac{20}{4x-7}$.

111. $\frac{9}{x-5}-\frac{5}{x-9}+\frac{28}{45-7x}=0$.

112. $\frac{13}{x-8}-\frac{15}{3x-26}=\frac{8}{x-13}$.

113. $\frac{2}{2x-5}-\frac{9}{3x-5}+\frac{4}{2x-15}=0$.

114. $\frac{x+7}{x+1}+\frac{x+9}{x+2}=\frac{4(x+8)}{2x+3}$.

115. $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-5}$.

116. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}$.

117. $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{8-x}=\frac{1}{7-x}+\frac{1}{5+x}$.

118. $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x-11}$.

119. $\frac{7}{x-9}+\frac{2}{x-4}=\frac{7}{x-7}+\frac{2}{x-11}$.

120. $\frac{3}{x+3}-\frac{3}{x+8}=\frac{5}{x-8}-\frac{5}{x-5}$.

121. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x-3} + \frac{2}{2-x}$.

122. $\frac{4}{x-5} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-7} = \frac{4}{x-4}$.

123. $\frac{1}{x-13} - \frac{2}{x-15} + \frac{2}{x-18} = \frac{1}{x-19}$.

124. $\frac{6}{x-5} - \frac{9}{x-3} = \frac{1}{x-7} - \frac{4}{x-1}$.

125. $\frac{9}{x-4} - \frac{10}{x-5} + \frac{6}{x-9} = \frac{5}{x-8}$.

Vermischte Gleichungen mit zahlenmäßig gegebenen Koeffizienten.

126. $\frac{5x-1}{7} : \frac{19-x}{4} = 1 : 2$.

127. $\frac{7x+1}{8} : 4 = \frac{8x-2}{7} : 5$.

128. $\frac{5x-7}{3} : \frac{3x+5}{4} = 6 : 5$.

129. $2 : 1 = \frac{4x+8}{3} : \frac{9x-5}{2}$.

130. $\frac{\frac{2}{5}(x-4)}{\frac{3}{8}(3x+5)} = \frac{1}{6}$.

131. $\frac{\frac{2}{3}(4x-1)}{\frac{3}{4}(5x+1)} = \frac{2}{3}$.

132. $(x-3)(x-4) = (x-6)(x-2)$.

133. $2(x+5)(x+2) = (2x+7)(x+3)$.

134. $(x-5) : (x-7) = (x-8) : (x-9)$.

135. $(x-5) : (x-7) = (x+1) : (x+3)$.

136. $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x-4}{x-5}$.

137. $\frac{2x-1}{2(x-3)} = \frac{3(x-2)}{3x-1}$.

138. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5x-2}{7x-3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2x-5}{3x-7}$.

139. $\frac{3}{4} \cdot \frac{4x-5}{3x-7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7x-3}{5x-4}$.

140. $6(x-6) = \frac{3x-14}{x-4}(2x-11)$.

141. $\frac{x+1}{x-1}(3x-11) = 3(x-3)$.

142. $3(2x-0{,}3) = 0{,}6 + 5(x-0{,}1)$.

143. $7(1{,}8x-3) - 3{,}9 = 11{,}1x - 3(2x-5)$.

144. $\frac{5x-0{,}4}{0{,}3} + \frac{1{,}3-3x}{2} = \frac{1{,}8-8x}{1{,}2}$.

145. $3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{x}}$.

146. $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x}$.

147. $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}.$

148. $\frac{2x^2-3x+5}{7x^2-4x-2}=\frac{2}{7}.$ 149.[1] $\frac{2x^2-14x+9}{3x^2-14x+24}=\frac{3}{8}.$

Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten ohne und mit Klammern.

150. $x+a=b.$ 151. $x-a=7.$

152. $x+a-b=m.$ 153. $a-x=b-8.$

154. $m-9+b=x-a+m-19.$

155. $ax+b=c.$ 156. $a-bx=c.$

157. $a-mx+b=-c.$ 158. $5x-a=3x+b.$

159. $3a+2x-4b=5x-b.$ 160. $5mx+2a=7mx-2b.$

161. $5a-7b+6nx=3a-5b-2c+8nx.$

162. $3mx-7a-5b=mx+2b+7c-5mx.$

163. $a(x-b)=c.$ 164. $4(x-a)=3x+5b.$

165. $7(a-x)=6(b-x).$ 166. $3(4a-3x)=5(4b-x).$

167. $(a-1)x=b-x.$

168. $ab+(b+1)x=(a+x)b+a.$

169. $2(3a+10x)+7(a-x)=13(a+b).$

170. $3(2a-x)+5(3b-2x)=5(3a-2x)+3(2b-3x).$

171. $3(5x-7a)+7(3a-5b)+5(3b-7x)=0.$

172. $mx+nx=a.$ 173. $ax-b=cx-d.$

174. $a-bx=cx-d.$ 175. $ax+cx=ab+c.$

176. $ax+x=m.$ 177. $ax+bx=m+x.$

178. $a-bx=cx-x.$ 179. $ax-bx-m(x-1)=m.$

180. $a(x-1)-b=x-a.$ 181. $ax=b(c-x).$

182. $(a+b)x=m-cx.$ 183. $(a-b)x=2a-(a+b)x.$

184. $(a-b)x-c=d-(b-c)x.$

185. $ab-(x-c)d=c(d+x).$

186. $a(b-x)+b(c-x)=b(a-x)+cx.$

187. $12ax-3b(x-a)=5a(2x+b)$

188. $(a+b)x+(a-b)x-ax=b+c.$

189. $(a+b)x-(a-b)x-bx=a+c.$

190. $(a-x)(b-x)=x^2.$

191. $(a-x)(1-x)=x^2-1.$ 192. $(a-x)(b+x)=a^2-x^2.$

193. $(x-a)(x-b)=x^2-a^2.$ 194. $(x-a)^2=(x-b)^2.$

---

1) Wo wie hier die Gleichung auf die Form $x^2+ax=0$ führt, ist darauf zu achten, daß auch $x=0$ der Gleichung genügt.

Bruchgleichungen.

195. $\frac{x}{a} = b.$ 196. $\frac{a}{x} = b.$ 197. $\frac{x}{a} - b = c.$

198. $a - \frac{x}{b} = c.$ 199. $\frac{a}{x} - b = c.$ 200. $a - \frac{b}{x} = c.$

201. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = c.$ 202. $x - \frac{x}{a} = b.$

203. $\frac{a}{x} - 1 = \frac{b}{x} - 9.$ 204. $\frac{x-a}{a} + b = x - 1$

205. $\frac{a - bx}{c} + b = \frac{bc - x}{c}.$ 206. $\frac{a - bx}{c} + x = \frac{cx - b}{c}.$

207. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c.$ 208. $\frac{ax}{b} - \frac{cx}{d} = m.$

209. $\frac{a - x}{b} = \frac{x - b}{a}.$ 210. $\frac{a - bx}{b} = \frac{ax - b}{a}.$

211. $\frac{x - a}{a} - m = \frac{x - b}{b} - n.$ 212. $a - \frac{b + x}{b} = b - \frac{a + x}{a}.$

213. $\frac{x + a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x - b}{a} + \frac{a}{b}.$ 214. $\frac{x}{a} - b = \frac{x}{b} - a$

215. $\frac{a + b}{x} - c = d - \frac{a - b}{x}.$ 216. $a\left(m - \frac{x}{n}\right) = b\left(n - \frac{x}{m}\right).$

217. $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{a}{b}.$ 218. $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{1}{a}.$ 219. $\frac{\quad + a}{x - a} = m.$

220. $\frac{ax + b}{ax - b} = \frac{m}{n}.$ 221. $\frac{a + x}{b + 2x} = 1.$ 222. $\frac{a(b + x)}{a - x} = b.$

223. $\frac{a}{a - x} = \frac{b}{b - x}.$ 224. $\frac{a + x}{a - x} = \frac{a + b}{a - b}.$

225. $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{a + b}{a - b}.$ 226. $\frac{a + b}{c + x} = \frac{a - b}{c - x}.$

227. $\frac{a + bx}{a + b} = \frac{c + dx}{c + d}.$ 228. $\frac{a + bx}{a - b} = \frac{c + dx}{c - d}.$

229. $\frac{a - x}{b - x} = \frac{a + x}{b + x}.$ 230. $\frac{ax - 2a}{ax - 2b} = \frac{ax - 2b}{ax + 2a}.$

231. $\frac{a}{b + x} - m = n.$ 232. $\frac{a}{b + x} - m = \frac{c}{b + x} - n.$

233. $\frac{a}{mx} + \frac{b}{nx} = c.$ 234. $\frac{a - bm}{mx} - \frac{c - bn}{nx} = 1.$

235. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = d.$ 236. $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{fx}{g} = h.$

237. $\frac{2x - a}{b} - \frac{b - 2x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$

238. $\frac{ax}{b} - \frac{b}{a}(x - b) = a.$

239. $\frac{a(2x + 1)}{3b} - \frac{5ax - 4b}{5b} = \frac{4}{5}.$

210. $\frac{6a - bx}{2a} + \frac{9b - cx}{3b} + \frac{20c - dx}{5c} = 10.$

241. $\frac{3b(x - a)}{5a} + \frac{x - b^2}{15b} + \frac{b(4a + cx)}{6a} = 0$

242. $\frac{ax}{b} - \frac{b - x}{2c} + \frac{a(b - x)}{3d} = a.$

243. $\frac{a - x}{a} + \frac{b - x}{b} + \frac{c - x}{c} = 3.$

244. $\frac{ax - b^2}{a} - \frac{a(b - x)}{b} + \frac{b^2}{a} = a.$

245. $\frac{a + 1}{x} : \frac{b - 1}{x} = (a + x) : (b - x)$

246. $\frac{ax + b}{x} : \frac{a}{d} = \frac{b}{a} : \frac{x}{cx + d}.$

247. $\frac{a^2b - x}{a} + \frac{b^2c - x}{b} + \frac{ac^2 - x}{c} = 0$

248. $\frac{1 - ax}{bc} + \frac{1 - bx}{ac} + \frac{1 - cx}{ab} = 0$

249. $\frac{a - x}{bc} + \frac{b - x}{ac} + \frac{c - x}{ab} = 0.$

250. $\frac{a - bx}{bc} + \frac{b - cx}{ac} + \frac{c - ax}{ab} = 0.$

Vermischte Aufgaben.

Löse die folgenden Gleichungen und setze dann nachträglich in Gleichung und Wurzel $n = 1, 2, 3 \ldots 10$:

251. $nx + 3x = n^2 + 6n + 9.$

252. $nx = 7x + n^2 - 14n + 49.$

253. $nx = n^2 + 2n + 1 - x.$

Löse die folgenden Gleichungen und lasse dann nachträglich in Gleichung und Wurzel die Größen a und b die Zahlen 1 bis 3 durchlaufen.

254. $ax - b = a - b.$

255. $a^2 + bx = b^2 - ax.$

256. $ax + b^2 = bx + a^2.$

Berechne aus den folgenden Gleichungen a) a, b) b:

257. $a + b = c.$ 258. $a - b = c.$

259. $a \cdot b = c.$ 260. $\frac{a}{b} = c.$

Löse die folgenden Gleichungen nach a) p, b) q, c) r auf:

261. $p - q + r + s = 0.$ 262. $\frac{p}{q} + r = s$

263. $pq - r = s.$ 264. $p(q - r) = s.$

Berechne aus den folgenden Gleichungen y:

265. $a + y = x$. **266.** $m + ny = x$.

267. $\frac{m + ny}{r} = x$. **268.** $\frac{a + by}{c + dy} = x$.

269. Jemand hat in sein Notizbuch die folgenden Gleichungen mit ihren Wurzeln geschrieben, wobei die durch Punkte bezeichneten Faktoren von x unleserlich geworden sind. Wie hießen diese Faktoren?

a) $5x - 5 = \cdots x - 3$
$x = 2$,

b) $\frac{1}{2}x + 3 = \cdots x + 2$
$x = 6$,

c) $\cdots x + 3 = 2x + 5$
$x = 1$.

270. Das harmonische Mittel m zweier Zahlen a und b ist $m = \frac{2ab}{a + b}$. Drücke a durch b und m aus.

271. Ist g eine Seite, h die zugehörige Höhe eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt f, so ist $\frac{g \cdot h}{2} = f$. Drücke **a)** g, **b)** h durch die anderen Größen aus.

272. Ist r der Radius eines Kreises, so ist sein Umfang $u = 2\pi r$. Wie groß ist r, ausgedrückt durch u?

273. Zwischen der Stromstärke i, dem Widerstande w und der Spannung e einer elektrischen Leitung besteht die Gleichung $e = i \cdot w$ Drücke **a)** i, **b)** w durch die anderen Größen aus.

274. An einem Hebel wirken in den Abständen a_1 und a_2 vom Drehpunkt die parallel gerichteten Kräfte k_1 und k_2. Dann ist $a_1 k_1 = a_2 k_2$. Drücke **a)** k_1, **b)** a_2 durch die anderen Größen aus.

275. Ist r der Betrag einer Rechnung und werden p Prozent Rabatt darauf geleistet, so ist der gezahlte Betrag $b = r - \frac{r \cdot p}{100}$. Wie drückt sich **a)** r, **b)** p durch die anderen Größen aus?

276. Ein Kapital k wächst in einem Jahre durch die p prozentigen Zinsen auf $\bar{k} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ an. Drücke **a)** k, **b)** p durch die anderen Größen aus.

277. Wenn eine Summe von a ℳ mit p % auf t Tage diskontiert wird, so ist der Betrag der Barzahlung $b = a - \frac{apt}{36000}$. Drücke **a)** a, **b)** p, **c)** t durch die anderen Größen aus.

278. Wenn ein Eisenstab, der bei 0^0 die Länge l_0 hat, auf t^0 erwärmt wird, so ist seine Länge $l_t = l_0(1 + \alpha t)$, wo $\alpha = 0{,}000012$ ist. Wie groß ist t, ausgedrückt durch l_t und l_0?

279. Wenn zwei Wassermengen m_1 und m_2 von den Temperaturen t_1 und t_2 zusammengegossen werden, so ergibt sich die Mischungstemperatur zu $t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$. Drücke **a)** m_1, **b)** t_1, **c)** m_2, **d)** t_2 durch die anderen Größen aus.

§ 17. Eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Vorübungen.

In den folgenden Aufgaben soll **a)** die der Aufgabe entsprechende Gleichung aufgestellt werden, **b)** diese Gleichung aufgelöst, **c)** durch die Probe die Richtigkeit des Ergebnisses bestätigt werden:

1. Welche Zahl muß man zu 0,738 addieren, um 0,96 zu erhalten?

2. Welche Zahl muß man von $3\frac{1}{3}$ subtrahieren, um $2\frac{1}{2}$ zu erhalten?

3. Durch welche Zahl muß man 33,033 dividieren, um 231 zu erhalten?

4. Mit welcher Zahl muß man $3\frac{1}{3}$ multiplizieren, um $7\frac{1}{7}$ zu erhalten?

5. Durch welche Zahl muß man $3\frac{1}{8}$ dividieren, um $2\frac{1}{2}$ zu erhalten?

6. Von welcher Zahl ist $5\frac{1}{5}$ der 10. Teil?

7. Zu welcher Zahl muß man b addieren, um a zu erhalten?

8. Welche Zahl gibt 0, wenn sie um m vermehrt wird?

9. Welche Zahl muß man um a vermindern, um b zu erhalten?

10. Um welche Zahl muß man m vermindern, um n zu erhalten?

11. Von welcher Zahl ist a das $m$fache?

12. Von welcher Zahl ist a der $n$te Teil?

13. Durch welche Zahl muß man a dividieren, um m zu erhalten?

14. Das Neunfache einer Zahl **a)** um 2 vermehrt gibt 11, **b)** um 3 vermehrt gibt 111, **c)** um 4 vermehrt gibt 1111, **d)** um 5 vermehrt gibt 11111, **e)** um 6 vermehrt gibt 111111, **f)** um 7 vermehrt gibt 1111111, **g)** um 8 vermehrt gibt 11111111, **h)** um 9 vermehrt gibt 111111111. Gib in jedem Falle die Zahl an und stelle die Ergebnisse aller Aufgaben in einer Tabelle zusammen.

15. Das Achtfache einer Zahl **a)** um 2 vermehrt gibt 98, **b)** um 3 vermehrt gibt 987, **c)** um 4 vermehrt gibt 9876, **d)** um 5 vermehrt gibt 98765, **e)** um 6 vermehrt gibt 987654, **f)** um 7 vermehrt gibt 9876543, **g)** um 8 vermehrt gibt 98765432, **h)** um 9 vermehrt gibt 987654321. Wie heißt in jedem Falle die Zahl? Stelle das Ergebnis der Aufgaben in einer Tabelle zusammen.

16. Um welche Zahl muß man 702 vermindern, um das Doppelte der Zahl zu erhalten?

17. Welche Zahl muß man von 875 subtrahieren, um ebensoviel zu erhalten, als wenn man 787 zu der Zahl addiert?

18. Welche Zahl bleibt ebensoviel unter $7\frac{1}{3}$, als sie $5\frac{1}{5}$ überschießt?

19. Welche Zahl liegt mitten zwischen $2\frac{1}{2}$ und $6\frac{1}{6}$?

20. Welche Zahl gibt, wenn man sie um 99 vermindert, ebensoviel, als wenn man sie durch 10 dividiert?

21. Das Dreifache und das Vierfache einer Zahl geben zusammen 10,01. Wie heißt die Zahl?

22. Von welcher Zahl beträgt das Doppelte um 7 mehr als ihr vierter Teil ausmacht?

23. Welche Zahl gibt, wenn man sie um ihr Dreifaches vermehrt, um $7\frac{1}{7}$ mehr, als wenn man sie verdoppelt?

24. Welche Zahl gibt, wenn man sie um $6\frac{1}{4}$ vermehrt, ebensoviel, als wenn man sie mit $7\frac{1}{4}$ multipliziert?

25. Der dritte und der fünfte Teil einer Zahl machen zusammen 88 aus. Wie heißt die Zahl?

26. Von welcher Zahl ist der 8. Teil um 3 kleiner als der 6. Teil?

27. Wenn man 13 vom Dreifachen einer Zahl abzieht, so erhält man ebensoviel, als wenn man 57 zum 5. Teil addiert. Wie heißt die Zahl?

28. Welche Zahl gibt bei Vermehrung um ihr Dreifaches und ihr Fünffaches 99?

29. Wie heißt die Zahl, deren $m$faches und $n$faches zusammen a ergeben?

30. Wie heißt die Zahl, deren $m$ter und $n$ter Teil zusammen p ergeben?

31. Wie heißt die Zahl, welche, um ihr $m$faches vermehrt, a gibt?

32. Von welcher Zahl ist das $n$fache gleich der um n verminderten Zahl?

33. Subtrahiert man von einer gewissen Zahl 5, multipliziert den Rest mit 7, addiert 2, dividiert das Ergebnis durch 6, addiert 4, so erhält man die ursprüngliche Zahl. Wie groß ist die Zahl?

34. Ich addiere 3 zu einer gewissen Zahl, multipliziere die erhaltene Summe mit 2, ziehe von dem Produkt 8 ab und erhalte ebensoviel, als wenn ich von der Zahl 4 abziehe, den Rest verdreifache und vom Produkt 1 abziehe. Wie heißt die Zahl?

35. Ich subtrahiere 7 von einer gewissen Zahl, multipliziere die Differenz mit 3 und addiere zu dem Produkt 2, so erhalte ich ebensoviel, als wenn ich die Zahl mit 8 multipliziere, von dem Produkt 3 subtrahiere und den Rest durch 7 dividiere. Wie heißt die Zahl?

36. Um welche Zahl muß man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{29}{69}$ vergrößern, um einen Bruch vom Werte $\frac{1}{2}$ zu erhalten?

Kleide die folgenden Gleichungen in Worte:

37. $9 + x = 5.$ 38. $9x = 11\frac{1}{4}$

39. $m = n - mx.$ 40. $5 - \frac{x}{5} = 4.$

41. $ax = x.$ 42. $1\frac{3}{4} = 5\frac{1}{4} : x.$

43. $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{3}.$ 44. $\frac{x+m}{x-m} = \frac{5}{4}.$

45. $\frac{51}{5-x} - 3 = 14.$ 46. $\frac{a}{x} + b = \frac{b}{x} + a.$

47. Um wieviel muß man jeden Faktor der Produkte $25 \cdot 51$ und $31 \cdot 40$ verkleinern, damit die neuen Produkte gleich werden?

48. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produktes $30 \cdot 147$ verkleinern und jeden Faktor des Produktes $14 \cdot 62$ vergrößern, damit die neuen Produkte gleich werden?

49. Welche Zahl kann man jedem Gliede der Proportion $3 : 6 = 4 : 8$ hinzufügen, so daß wieder eine richtige Proportion entsteht?

50. Welche Zahl muß man zu jeder der Zahlen 3 und 5 addieren, so daß die entstehenden Zahlen sich wie $8 : 11$ verhalten?

51. Um welche Zahl muß man jede der Zahlen 1, 5, 27, 57 vergrößern, wenn die neuen Zahlen in der angegebenen Reihenfolge eine Proportion bilden sollen?

52. Um welche Zahl muß man jede der Zahlen 11, 16, 35, 60 verkleinern, damit die neuen Zahlen in der angegebenen Reihenfolge eine Proportion bilden?

53. Um welche Zahl muß man jede der Zahlen 6, 10, 22 verkleinern, damit die verkleinerten Zahlen in der angegebenen Reihenfolge eine stetige Proportion bilden?

54. Welche Zahl muß man zu m und zu n addieren, wenn die vergrößerten Zahlen sich wie $p : q$ verhalten sollen?

55. Welche Zahl muß man zu m addieren und von n subtrahieren, damit die neuen Zahlen sich wie $a : b$ verhalten?

Teilungs- und Mischungsaufgaben.[1]

56. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäft gibt A 7000 ℳ, B 9000 ℳ. Sie gewinnen 1824 ℳ. Wieviel erhält jeder?

57. A und B gründen ein Geschäft mit 7850 ℳ, von denen A 3450 ℳ hergibt. Sie haben einen Gewinn von 628 ℳ. Wieviel erhält ein jeder davon?

58. Drei Familien erben 15000 ℳ, die nach der Anzahl der Familienmitglieder verteilt werden sollen. Die erste hat 3, die zweite 5, die dritte 6 Kinder. Wieviel erhält jede Familie, wenn sämtliche Eltern noch leben?

59. Es sollen 1225 ℳ so unter vier Personen verteilt werden, daß jede folgende um $\frac{1}{3}$ mehr erhält als die vorhergehende.

60. Fünf Personen sollen sich 1055 ℳ in der Art teilen, daß jede folgende Person immer um die Hälfte mehr erhält als die vorhergehende. Wieviel erhält jede Person?

61. Unter A, B und C soll eine Summe Geldes verteilt werden. A erhält $\frac{1}{5}$ derselben und 190 ℳ, B $\frac{1}{4}$ derselben und 170 ℳ, C $\frac{1}{3}$ derselben und 160 ℳ Wie groß ist die zu verteilende Summe, und wieviel erhält jeder?

62. Unter A, B und C soll eine Summe Geldes verteilt werden. A erhält 200 ℳ weniger als $\frac{2}{5}$ der Summe, B 700 ℳ weniger als $\frac{2}{3}$ der Summe, C 330 ℳ mehr als $\frac{1}{4}$ der Summe. Wie groß ist die zu verteilende Summe, und wieviel erhält jeder?

63. A, B und C sollen einen Gewinn von 7245 ℳ teilen. A hatte 6500 ℳ, B 7500 ℳ, C 10000 ℳ in das Geschäft gelegt. A soll wegen seiner Tätigkeit im Geschäft 15%, B 12% mehr erhalten als ihm sonst nach der Einlage zukommt. Wieviel erhält jeder vom Gewinn?

64. A, B und C gewinnen bei einem Geschäft 6660 ℳ. A soll für größere Arbeit 10% mehr haben, als ihm noch seiner Einlage zukommt. Wieviel erhält jeder, wenn die Einlagen sich wie 5 : 6 : 7 verhalten?

65. A, B, C und D sollen sich 18000 ℳ teilen. A soll viermal soviel als D erhalten, weniger 6000 ℳ; B soll dreimal soviel erhalten als D, weniger 4000 ℳ; C schließlich soll doppelt soviel erhalten als D, weniger 2000 ℳ. Wieviel erhält jeder?

66. Es hinterließ jemand ein Vermögen von 14500 ℳ; darein sollten sich seine vier Söhne teilen. Der zweite sollte doppelt soviel haben als der erste, weniger

---

1) Vgl. auch die Aufgaben 193, 197, 198, 203, 215, 216, 218, 219 in diesem Paragraphen

3000 ℳ, der dritte doppelt soviel als der zweite, weniger 4000 ℳ, der vierte doppelt soviel als der dritte, weniger 5000 ℳ. Wieviel erhielt jeder?

67. A, B und C sollen sich 1000 ℳ teilen. B erhält $\frac{1}{3}$ mehr als A, weniger 100 ℳ, C erhält 200 ℳ weniger als A und B zusammen. Wieviel erhält jeder?

68. A, B und C sollen sich 10000 ℳ teilen. B soll $\frac{1}{4}$ mehr erhalten als A, weniger 200 ℳ, C $\frac{1}{5}$ mehr als B, weniger 300 ℳ. Wieviel erhält jeder?

69. Jemand mischt zwei Sorten Wein; von der einen Sorte kostet die Flasche 1,20 ℳ, von der anderen 2,70 ℳ. Er will 150 Flaschen herstellen zum Preise von 2 ℳ. Wieviel Flaschen muß er von jeder Art nehmen?

70.[1]) Jemand hat 3000 l Spiritus von 70 %. Wieviel Wasser hat er zuzusetzen, damit der Spiritus nur noch 60 % hält?

71. Jemand hat 600 l Spiritus von 60 %. Wieviel Spiritus von 95 % muß er zusetzen, um Spiritus von 80 % zu erhalten?

72. Jemand braucht 1000 l Spiritus zu 80 %. Er hat Spiritus zu 77 % und zu 87 %. Wieviel muß er von jeder Art nehmen?

73. Jemand hat 700 l Spiritus von 75 %. Wieviel Wasser muß er demselben entziehen, damit der Gehalt des Spiritus auf 84 % steigt?

74. Ein Goldschmied will aus 9 lötigem und 13 lötigem Silber 12 lötiges Silber herstellen. Wieviel muß er von jeder Art nehmen, wenn er 100 g nötig hat?

75. Wieviel Kupfer muß ein Goldschmied zu 200 g 14 lötigen Silbers hinzusetzen, um 12 lötiges zu erhalten?

76. Jemand hat 100 g 18 karätiges Gold. Wieviel Kupfer muß er ausscheiden, um 20 karätiges Gold zu erhalten?

77. Wieviel Wasser muß man verdampfen, um aus 2000 l 4 prozentiger Salzsole 10 prozentige zu erhalten?

Prozent- und Zinsaufgaben.[2])

78. Ein Verleger hatte eine Einnahme von 375282 ℳ. Für wieviel Mark Bücher, nach dem buchhändlerischen Preise gerechnet, hatte er abgesetzt, wenn er den Buchhandlungen $33\frac{1}{3}$ % Rabatt gab?

79. Ein Geschäft gibt bei Abgabe von sechs Heften eins umsonst zu. Wieviel Prozent Rabatt sind das?

80. Von den Lotteriegewinnen behält der Staat 14,3 %, der Lotterieeinnehmer 1,5 % zurück. Welcher Gewinn ist auf ein Achtellos gefallen, wenn der Besitzer 21 050 ℳ ausgezahlt erhält?

81. Ein Kaufmann verkaufte einen Posten Ware mit $3\frac{1}{4}$ % Verlust für 3483 ℳ. Wieviel hat er im Einkauf gegeben?

82. Ein Kapital steht zu $4\frac{1}{4}$ % und wächst in drei Jahren mit den einfachen Zinsen zu 6765 ℳ an. Wie groß war es ursprünglich?

83. A hatte von B nach einiger Zeit für ein Grundstück 82000 ℳ zu empfangen. B zahlte gleich bar 80000 ℳ. Nach welcher Zeit sollte B ursprünglich zahlen, wenn monatlich $\frac{1}{3}$ % Zinsen gerechnet werden?

84. A wollte von B ein Grundstück kaufen. B forderte eine gewisse Summe, die A nach 8 Monaten zahlen sollte. A zahlte statt dessen auf der Stelle 163500 ℳ.

---

1) Von der bei der Mischung eintretenden Volumenänderung ist in den Aufg. 70—73 abzusehen.

2) In allen Aufgaben sind nur einfache Zinsen, niemals Zinseszinsen zu rechnen.

Wie hoch stellte sich demnach die Forderung von B bei Annahme einer jährlichen Verzinsung zu $4\frac{1}{2}$%.

85. A wollte von B ein Haus kaufen. B forderte 47908 ℳ, nach 3 Monaten zahlbar. A zahlte bar. Wie groß war die Barzahlung, wenn monatlich $\frac{1}{2}$% Zinsen gerechnet werden?

86. Jemand hatte ein Kapital zu 4 % auf Zinsen stehen. Durch Heruntergehen des Zinsfußes auf $3\frac{1}{2}$ % verlor er jährlich 150 ℳ. Wie groß war sein Kapital?

87. Jemand hat drei Zahlungen zu machen: 3750 ℳ nach 4 Monaten, 4580 ℳ nach 9 Monaten, 5350 ℳ nach einem Jahre. Er will die Summe auf einmal zahlen. Wann muß das geschehen, wenn auf keiner Seite ein Zinsenverlust stattfinden soll?

88. Jemand hat vier Zahlungen zu machen: 600 ℳ sogleich, 600 ℳ nach 3 Monaten, 600 ℳ nach 5 Monaten, 600 ℳ nach 8 Monaten. Er will die Summe auf einmal zahlen. Wann kann das ohne Zinsenverlust geschehen?

89. A hat an B a ℳ nach m Monaten, b ℳ nach n Monaten, c ℳ nach p Monaten, d ℳ nach q Monaten zu zahlen. Wann kann er die ganze Summe ohne Zinsenverlust zahlen?

90. A hat an B nach einem Jahre 5000 ℳ zu zahlen. Er will die Summe in fünf gleichen Terminen, jedesmal 1000 ℳ, abtragen. Wann sind die Termine anzusetzen, wenn die ersten 1000 ℳ nach 2 Monaten gezahlt werden, und wenn keinerseits ein Zinsenverlust stattfinden soll?

91. A hat an B nach 8 Monaten eine gewisse Summe zu zahlen. Er wird mit B einig, 600 ℳ gleich, 700 ℳ nach 3 Monaten, 800 ℳ nach 6 Monaten, den Rest nach einem Jahre zu zahlen. Wie groß war die Summe?

92. A bietet für ein Haus 20000 ℳ bar, B 20500 ℳ, zahlbar nach 6 Monaten, C 21000 ℳ, zahlbar nach einem Jahre. Wer bot am meisten, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ % gerechnet werden, und um wieviel bot er mehr als die andern?

93. A hat bei B drei Kapitalien auf Zinsen: 1200 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ %, 1000 ℳ zu 4 % und 800 ℳ zu $4\frac{3}{4}$ %. A wünscht die ganze Summe zu gleichem Prozentsatz auszuleihen. Wieviel Prozent muß er rechnen, wenn auf keiner Seite ein Zinsenverlust stattfinden soll?

94. Ein Kapital von a ℳ wächst in n Jahren mit den einfachen Zinsen zu b ℳ an. Zu wieviel Prozent stand es?

95. Ein Kapital von a ℳ wächst mit den einfachen Zinsen bei p % zu b ℳ an. In wieviel Jahren geschah das?

96. Jemand hatte a ℳ nach m Monaten zu zahlen. Wie groß wäre die Barzahlung bei p % monatlichem Rabatt gewesen?

97. Wie groß war die Barzahlung im Falle der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Rabatt nicht auf 100 gerechnet wird, wie es sonst bei Kapitalzahlungen stets geschieht, sondern von 100?

98. A hat an B nach m Monaten a ℳ zu zahlen oder gleich bar mit p % monatlichem Rabatt. A will von 100, B auf 100 rechnen. Wie groß ist der Unterschied in der Barzahlung?

99. Wieviel Prozent Rabatt von 100 sind p % Rabatt auf 100?

100. Wieviel Prozent Rabatt auf 100 sind $p\,\%$ Rabatt von 100?

101. Ein Kaufmann gewinnt an einer Ware 32 %, wenn er das Kilogramm mit 1 ℳ 80 ₰ verkauft. Wieviel Prozent gewinnt oder verliert er, wenn er 1 kg mit 1 ℳ 20 ₰ verkauft?

102. Ein Kaufmann gewinnt an einer Ware 25 %, wenn er das Kilogramm mit 1 ℳ verkauft. Wie hoch muß er das Kilogramm verkaufen, wenn er 30 % gewinnen will?

103. Ein Kaufmann gewinnt bei einer Ware $p\,\%$, wenn er das Kilogramm für a ℳ verkauft. Wieviel Prozent gewinnt er, wenn er das Kilogramm für b ℳ verkauft?

Aufgaben aus der Geometrie.[1]

104. Eine Strecke von 4,8 cm soll **a)** innerlich, **b)** äußerlich im Verhältnis 3 : 5 geteilt werden. Wo liegt der Teilpunkt?

105. Welcher Winkel ist **a)** doppelt so groß, **b)** n mal so groß, **c)** halb so groß als sein Nebenwinkel?

106. In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze **a)** doppelt, **b)** n mal so groß als jeder Basiswinkel. Wie groß sind die Winkel?

107. In einem gleichschenkligen Dreieck sind **a)** die Schenkel doppelt so groß wie die Grundlinie, **b)** verhalten sich Basis und Schenkel wie 7 : 4. Wie groß sind die Seiten, wenn der Umfang 25 cm ist?

108. Welches Vieleck hat **a)** doppelt, **b)** halb soviel Diagonalen als Seiten?

109. In welchem (nicht überschlagenen) Vieleck ist die Summe der Winkel 10 R?

110. Der Inhalt eines Rechtecks ist 36 qcm, die eine Seite 1, 2, 3 ... 12 cm. Wie lang ist jeweilig die andere?

111. In einem Rechteck mit dem Inhalt 48 qcm ist die eine Seite **a)** 2 cm länger, **b)** dreimal so lang als die andere. Wie groß sind die Seiten?

112. In einem Rechteck mit dem Inhalt f ist die eine Seite **a)** um m kürzer, **b)** den $n$ten Teil so lang als die andere. Wie groß sind die Seiten?

113. In einem Trapez ist **a)** die Differenz der beiden parallelen Seiten 3 cm, **b)** das Verhältnis der beiden parallelen Seiten 3 : 5. Wie groß sind die beiden Seiten, wenn die Höhe 6 cm, der Inhalt 96 qcm ist?

114. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist 18 m, die andere 6 m kleiner als die Hypotenuse. Wie groß sind die Dreiecksseiten?

115. Die Hypotenusenhöhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist 3 cm größer als der kleinere und 4 cm kleiner als der größere Hypotenusenabschnitt. Wie groß ist die Höhe?

116. Zwei Seiten eines Dreiecks sind 4 cm und 6 cm lang. Von den zu den Seiten gehörenden Höhen ist die eine um 1 cm länger als die andere. Wie lang sind die beiden Höhen?

---

1) Vgl. auch die Aufgaben 189, 190, 217 in diesem Paragraphen.

Bewegungsaufgaben.[1])

117. In der folgenden Liste sind die in cm pro Sekunde ausgedrückten Geschwindigkeiten in km pro Stunde umzurechnen:

a) Soldat im Marsch	130	cm pro Sekunde
b) Pferd im Galopp	500	" " "
c) Ozean-Dampfer	1000	" " "
d) Fahrrad (Höchstleistung)	1500	" " "
e) Zeppelin-Luftschiff (Schwaben)	2000	" " "
f) Schwalbe im Flug	5800	" " "

118. In der folgenden Liste sind die in km pro Stunde ausgedrückten Geschwindigkeiten in cm pro Sekunde umzurechnen:

a) Fußgänger	4 bis 5	km pro Stunde
b) Personenzug	30 bis 40	" " "
c) D-Zug	80 bis 90	" " "
d) Zug bei Schnellbahnversuchen	205	" " "
e) Höchstleistung von Automobilen	220	" " "

119. Die zwischen den einzelnen Eisenbahnschienen vorhandenen Stoßfugen verursachen ein im fahrenden Zug wahrnehmbares taktmäßiges Aufschlagen der Räder Ein Reisender zählt in der Minute 92 Anschläge; welches ist die in km pro Stunde ausgedrückte Geschwindigkeit des Zuges, wenn die Strecke 12 m-Schienen hat?

120. Zwei Freunde, welche 25 km voneinander entfernt wohnen, gehen einander entgegen. Der erste legt stündlich $3\frac{1}{2}$ km, der zweite stündlich 4 km zurück. Nach wieviel Stunden treffen sie zusammen, wenn sie gleichzeitig aufbrechen?

121. A und B, welche 12 km voneinander entfernt wohnen, wandern in derselben Richtung. Stündlich legt A 5 km, B $3\frac{1}{2}$ km zurück. Wann wird A den B einholen, wenn sie gleichzeitig aufbrechen?

122. Zwei Freunde A und B, die 36 km voneinander entfernt wohnen, radeln einander entgegen. Welche Strecke muß jeder bis zum Zusammentreffen zurücklegen, wenn sie zu gleicher Zeit aufbrechen, und wenn ihre Geschwindigkeiten sich wie 5 : 7 verhalten?

123. Einer Schulklasse, die einen Klassenausflug macht, folgt ein Nachzügler mit dem Rad; er legt stündlich 15 km zurück. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Klasse, wenn der Nachzügler eine Stunde später aufbricht als die Klasse und sie nach einer halben Stunde einholt?

124. Von einem Ort reitet ein Reiter ab, der in je 3 Stunden 28 km zurücklegt. Ihm wird eine Stunde später ein zweiter Reiter nachgeschickt, der in je 2 Stunden 20 km zurücklegt. Wann und wo wird der zweite den ersten einholen?

125. Von A geht ein Bote nach B und legt die Strecke in 80 Minuten, von B geht ein anderer Bote nach A und legt die Strecke in 120 Minuten zurück. Wann und wo werden sie sich treffen, wenn sie zu gleicher Zeit aufbrechen?

126. Ein Fußgänger bricht um 8 Uhr von M auf, um nach N zu gehen, und trifft um 10 Uhr in N ein. Ein Reiter reitet um 9 Uhr aus N ab und trifft um 9 Uhr 40 Minuten in M ein. Wann und wo werden sich Reiter und Fußgänger begegnen, wenn die Entfernung MN 10 km beträgt?

---

1) Vgl. auch die Aufgaben 204 und 207 in diesem Paragraphen.

127. Aus A bricht ein Radfahrer auf, der stündlich 12 km zurücklegt. Aus dem Orte B, den der Radfahrer passieren muß, ist eine Stunde vor seinem Aufbruch ein Bataillon aufgebrochen, das in derselben Richtung marschiert wie er und stündlich 5 km zurücklegt. Wann holt der Radfahrer das Bataillon ein, wenn die Strecke AB 9 km lang ist?

128. Wann und wie oft stehen Stunden- und Minuten-Zeiger einer Uhr übereinander?

129. Wann und wie oft ist bei einer Uhr der große Zeiger dem kleinen um 30^0 voraus?

Aufgaben aus der Physik.[1])

Spezifisches Gewicht.

130. Ein Ziegelstein hat Kanten von 25 cm, 12 cm und 6,5 cm Länge und wiegt ungefähr 4 kg. Welches ist sein spezifisches Gewicht?

131. Ein plattenförmiger Eisberg ragt 12 m aus dem Wasser. Wie dick ist er? (Spezifisches Gewicht des Eises 0,9).

132. Ein Stück Blei und ein Stück Korkholz sind miteinander verbunden. Sie wiegen zusammen 100 g und schwimmen gerade im Wasser. Wieviel kommt von dem Gesamtgewicht auf das Blei und wieviel auf das Korkholz? Das spezifische Gewicht von Blei ist 11,35, das von Korkholz ist 0,24.

133. Eine Legierung aus Silber und Zinn wiegt 10 kg und hat das spezifische Gewicht 9. Wieviel Silber und wieviel Zinn enthält die Legierung? Das spezifische Gewicht von Silber ist 10,2, von Zinn 7,3.

134. Wie schwer muß ein Brett von Pappelholz sein, das ein spezifisches Gewicht von 0,39 hat, wenn es eine Tragkraft von 5 kg haben, d. h. 5 kg weniger wiegen soll, als das von ihm verdrängte Wasser?

135. Ein Stück Blei von 10 kg soll mit einem so großen Stück Korkholz verbunden werden, daß die Verbindung noch eine Tragkraft von 2 kg hat. Wieviel Korkholz muß man nehmen? Das spezifische Gewicht von Blei ist 11,35, das von Korkholz ist 0,24.

136. Ein Korkzylinder von $r = 15$ mm Radius und $h = 20$ cm Höhe wird durch eine auf den Grundkreis passende bleierne Halbkugel beschwert. Wie tief sinkt der Zylinder in Wasser ein? ($s_1 = 0{,}24$; $s_2 = 11{,}4$).

137. Ein junger Mann, der 54 kg wiegt, will sich einen Korkgürtel machen, um sich das Schwimmen zu erleichtern. Wie schwer muß dieser sein, wenn der Mann mit dem Gürtel angetan gerade vom Wasser getragen wird und den Kopf über Wasser hat? Sein Kopf möge 3 kg wiegen und das spezifische Gewicht des eingetauchten Teils seines Körpers 1,02, das des Korkholzes 0,24 sein.

138. Ein allseitig geschlossener Kasten von äußerlich 100 mm Länge, 84 mm Breite und 60 mm Höhe, der überall eine Wandstärke von 2 mm aufweist, taucht 22 mm tief ins Wasser ein. Welches spezifische Gewicht hat der Stoff, aus dem er gefertigt ist?

139. Ein oben offener Kasten von äußerlich 100 mm Länge, 98 mm Breite und 26 mm Höhe, dessen Wände und Boden überall 1 mm stark sind, taucht im

1) In diesen Aufgaben werden die entsprechenden physikalischen Tatsachen vorausgesetzt. Die Mehrzahl der Aufgaben dieses Abschnittes ist etwas schwieriger; sie eignen sich also besonders zur Wiederholung.

Wasser gerade zur Hälfte ein. Welches spezifische Gewicht besitzt der Stoff, aus dem er gefertigt ist?

140. Ein zylindrischer Becher, der bei 1 cm Wand- und Bodenstärke im Lichten einen Grundkreisradius von 6 cm und eine Höhe von 49 cm aufweist, taucht in Wasser 35 cm tief ein. Welches spezifische Gewicht hat der Stoff, aus dem er gefertigt ist?

141. Wie tief taucht ein allseitig geschlossener Kasten aus 1 mm starkem Zinkblech, der äußerlich 80 mm lang, 52 mm breit und 50 mm hoch ist, in Wasser ein, wenn das spezifische Gewicht des Zinks zu 7 angenommen wird?

142. Das spezifische Gewicht des Messings werde zu 8,5 angenommen. Wie tief taucht ein oben offener Kasten aus 1 mm starkem Messingblech in Wasser ein, der äußerlich 130 mm lang, 80 mm breit und 51 mm hoch ist?

143. Wie tief taucht der vorstehend beschriebene Kasten in Wasser ein, wenn er selbst bis zu einer Höhe von 25 mm mit Wasser gefüllt ist?

144. Ein oben offener Kasten aus 1 mm starkem Metallblech vom spezifischen Gewicht 8, dessen äußerliche Länge, Breite und Höhe 192 mm, 114 mm und 58 mm betragen, ist teilweise mit Wasser gefüllt, und taucht vermöge dessen selbst bis zum Rand ins Wasser ein. Wie hoch steht in ihm das Wasser und um wieviel würde er selbst sich heben, wenn das Wasser aus seinem Innern entfernt würde?

145. Ein modernes Kriegsschiff habe in der Wasserlinie einen Querschnitt von 1400 qm. Um wieviel tiefer sinkt es im Wasser ein, wenn 500 Mann mit einem Durchschnittsgewicht von 84 kg plötzlich an Bord erscheinen?

146. Ein zweites Schiff von 1200 qm Querschnitt in der Wasserlinie sinkt bei dem Erscheinen von 300 Mann an Bord um 22 mm tiefer ein. Wie groß stellt sich das Durchschnittsgewicht des einzelnen Mannes?

147. Ein Luftballon von 1500 cbm Rauminhalt ist mit Leuchtgas gefüllt. Ein Liter atmosphärischer Luft wiegt im Meeresniveau ungefähr 1,3 g, ein Liter Leuchtgas 0,6 g. Der Stoff des Ballons wiegt 150 kg, die gesamte außerdem zu tragende Last stellt sich auf 800 kg. Welche Steigkraft besitzt der Ballon, wie hoch wird der Barometerstand in der Höhe sein, bis zu der er sich erheben kann? Berechne diese Höhe, indem du ihre Meterzahl gleich $16000 \cdot \frac{B-\beta}{B+\beta}$ annimmst, wenn B den Barometerstand in Meereshöhe und β den Barometerstand in der vom Ballon erreichten Höhe bedeutet.[1])

148. Wie gestalten sich die Verhältnisse bei dem eben (Aufg. 147) beschriebenen Ballon nach Auswerfen von 100 kg Ballast?

149. Wie groß bestimmen sich Steigkraft und Steighöhe bei einer Füllung des vorstehend (Aufg. 147) beschriebenen Ballons mit Wasserstoffgas, wenn das Gewicht von 1 cbm Wasserstoffgas zu 90 g angenommen wird, während die zu tragende Last sich auf 1500 kg erhöht?

150. Wie hoch steigt der Ballon im letzteren Falle (Aufg. 149) nach Auswerfung von 200 kg Ballast, wenn die Meterzahl dieser Höhe mittels des Ausdrucks $18400 (\log B - \log \beta)$ berechnet wird?

151. Wie stellen sich die vorstehend angegebenen Verhältnisse für einen Ballon von 80 kg Eigengewicht, der 600 cbm faßt, wenn die zu tragende Last 240 kg beträgt, wovon 40 kg auf den Ballast kommen, bei Füllung mit Leuchtgas?

---

1) Vgl. § 15, Aufg. 83–85.

152. Wie stellen sich die Verhältnisse, wenn der soeben beschriebene Ballon mit Wasserstoff gefüllt ist, während er 500 kg, darunter 100 kg an Ballast, zu tragen hat?

Arbeitsbegriff. Hebel.

153. Eine Fabrik fertigt ein gewisses Quantum Arbeit mit 36 gleichwertigen Maschinen bei 10-stündiger täglicher Arbeitszeit. Wieviel Maschinen müssen neu eingestellt werden, wenn die gleiche Arbeit bei 9-stündiger Arbeitszeit zu leisten ist?

154. In einer Fabrik mit a Arbeitern wird die Arbeitszeit von t_1 auf t_2 Stunden heruntergesetzt. Wieviel Arbeiter sind mehr einzustellen — immer unter der Voraussetzung, daß die Arbeitsleistung der einzelnen Arbeiter die gleiche ist?

155. Ein Schüler soll während der Vierwochen-Ferien täglich $1\frac{1}{2}$ Stunde arbeiten. Er will sich aber lieber eine Woche ganz von der Arbeit frei machen; wieviel Stunden muß er in den anderen drei Wochen täglich mehr arbeiten, wenn die gesamte Arbeitszeit die gleiche bleiben soll?

156. An den Enden eines 30 cm langen Stabes hängen Gewichte, an dem einen 1 kg, an dem anderen 0,5 kg. In welchem Punkte muß man den Stab unterstützen, um Gleichgewicht herzustellen?

157. An einem Arm eines zweiarmigen Hebels hängen 2 Gewichte von 70 g und 40 g. Der Aufhängungspunkt des ersteren steht um 3 cm weiter von der Drehungsachse des Hebels ab, als der des letzteren. Wie weit sind beide Punkte von der Drehungsachse entfernt, wenn sie durch ein am andern Hebelarme in 10 cm Entfernung von der Drehungsachse aufgehängtes Gewicht von 120 g im Gleichgewicht gehalten werden?

158. An dem einen Arm eines zweiarmigen Hebels hängen in 6 und 12 cm Entfernung von der Drehungsachse zwei Gewichte von zusammen 190 g. Wie groß ist jedes von ihnen, wenn sie durch ein am andern Hebelarm in 16 cm Entfernung von der Drehungsachse aufgehängtes Gewicht von 90 g im Gleichgewicht gehalten werden?

Wärme.

159. Welche Temperaturangaben zeigen die Thermometer **a)** von Reaumur, **b)** von Celsius, wenn das Fahrenheitsche Thermometer $+ 95^0$ zeigt?

160. Welche Temperatur zeigt ein Fahrenheitsches Thermometer, wenn die Summe der Angaben eines Reaumurschen und eines Celsiusschen Thermometers -27^0 beträgt?

161. Für welche Temperatur unterscheiden sich die Angaben der Thermometer von Fahrenheit und von Reaumur nur durch das Vorzeichen?

162. Für welche Temperatur ist die Reaumursche Gradzahl das Vierfache der Fahrenheitschen Angabe?

163. Für welche Temperatur ist die Celsiussche Gradzahl, abgesehen vom Vorzeichen, das Dreifache der Fahrenheitschen Angabe?

164. Zwei aufeinanderfolgende Eisenbahnschienen, die bei 0^0 eine Länge von 10 m haben, stoßen bei 30^0 Celsius unmittelbar aneinander. Wie groß ist die Lücke (Stoßfuge) zwischen ihnen bei einer Temperatur von 10^0, wenn der Ausdehnungskoeffizient zu 0,000012 angenommen wird?

165. Bei einem Rostpendel haben die drei Stahlstäbe zusammen eine Länge von 100 cm, wie lang muß jeder der beiden Zinkstäbe sein, wenn die Ausdehnungskoeffizienten für Stahl und Zink zu 0,000012 und 0,00003 angenommen werden?

166. Wieviel kochendes Wasser muß man zu 16° (Zimmertemperatur) warmem Wasser zugießen, um 100 l Badewasser von 25° zu bekommen?

167. Auf 54 g Eisenfeilspäne von 7° Wärme werden 10 g Wasser von 20° gegossen. Wie stellt sich die Ausgleichungstemperatur, wenn die spezifische Wärme des Eisens zu $\frac{1}{9}$ angenommen wird?

168. Welche Temperatur haben 20 g Terpentinspiritus von der spezifischen Wärme 0,4, die zu 42 g Wasser von 30° hinzugesetzt eine Mischung von der Temperatur 28,4° ergeben?

169. In 80 g Wasser von 13° C. wird der aus siedendem Wasser entweichende Dampf geleitet. Dadurch gerät jenes Wasser ins Sieden, während seine Menge sich zugleich um 13 g vermehrt. Welcher Wert ergibt sich hieraus für die Siedewärme des Wasserdampfes?

170. Bei Wiederholung dieses Versuches tritt das Sieden einer Wassermenge von 75 g und 14° ursprünglicher Temperatur erst ein, nachdem 14 g hinzugekommen sind. Wieviel Kalorien sind diesmal an die Umgebung verloren worden?

Schall.

171. Die Schwingungszahlen der Töne einer Durtonleiter verhalten sich wie

Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
1 :	$\frac{9}{8}$:	$\frac{5}{4}$:	$\frac{4}{3}$:	$\frac{3}{2}$:	$\frac{5}{3}$:	$\frac{15}{8}$:	2.

Der sechste Ton dieser Reihe, a^1, hat die Schwingungszahl 435. Welche Schwingungszahlen haben die anderen Töne der Tonleiter?

172. Die Schwingungszahlen zweier Saiten verhalten sich bei gleicher Spannung und Dicke und gleichem Material umgekehrt wie die Längen. Eine Saite von 120 cm Länge soll so geteilt werden, daß der eine Teil die Prime, der andere **a)** die Sekunde, **b)** die Terz, **c)** die Quarte, **d)** die Quinte, **e)** die Sexte, **f)** die Septime, **g)** die Oktave gibt. Wo liegt jeweilig der Teilpunkt?

173. Die Pfeife einer Lokomotive möge einen Ton mit der Schwingungszahl n aussenden. Die Lokomotive fährt **a)** mit der Geschwindigkeit von 15 m pro Sekunde vom feststehenden Beobachter fort, **b)** kommt mit derselben Geschwindigkeit auf den Beobachter zu. Welches ist die Schwingungszahl des wirklich gehörten Tones, wenn die Schallgeschwindigkeit zu 330 m angenommen wird?

Licht — Elektrizität.

174. Zwischen Gegenstandsweite a und Bildweite b einer Linse mit der Brennweite f besteht die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. **a)** Berechne a aus b und f, **b)** berechne b aus a und f, **c)** berechne f aus a und b.

175. Eine Gasglühlichtflamme gebraucht bei einer Lichtstärke von 48 Kerzen in der Stunde 110 l Gas. Wieviel kostet eine Kerze in der Stunde, wenn der Kubikmeter Gas 16 ₰ kostet?

176. Ein Strom von 10 Volt Spannung hat eine Stärke von 5 Amp. Welcher Widerstand muß eingeschaltet werden, damit die Stromstärke auf 2 Amp. sinkt?

177. Wie groß ist der Widerstand eines Stromes von 6 Volt Spannung, dessen Stärke durch Einschaltung eines Widerstandes von 2 Ohm auf 1,2 Amp. herabsinkt?

178. Bei einem Strom von 20 Volt Spannung weist die Strecke AB des äußeren Stromweges einen Widerstand von 3 Ohm auf. Fügt man zwischen den Punkten A und B noch eine zweite Verbindung ein, deren Widerstand 6 Ohm beträgt, so steigt die Stromstärke auf 5 Amp. Wie groß ist der Stromwiderstand mit Ausschluß der Strecke AB?

Astronomie.

179. Die scheinbare Bewegung eines Fixsternes ist derart, daß eine volle Umdrehung in ungefähr 23 Stunden 56 Minuten geschieht. **a)** Wieviel Grad pro Stunde beträgt die Umdrehungsgeschwindigkeit? **b)** In welcher Zeit wird 1 Grad zurückgelegt?

180. Die scheinbare Bewegung der Sonne gegenüber dem Fixsternhimmel besteht in einem täglichen Zurückbleiben gegenüber den Fixsternen derart, daß in einem Jahre das Zurückbleiben 360^0 beträgt. **a)** Um wieviel Grad bleibt die Sonne im Durchschnitt täglich zurück, d. h. wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Sonne, ausgedrückt in Grad pro Tag?

181. Auf 15 Erdenjahre kommen (ungefähr) 8 Marsjahre. Welche Zeit vergeht zwischen zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten, zu denen der Mars für die Erdbewohner in Opposition zur Sonne steht?

182. Die Zeit eines Umlaufs der Venus um die Sonne beträgt mehr als $\frac{3}{5}$ und weniger als $\frac{5}{8}$ eines Erdenjahres. Welcher Wert ergibt sich je nach der Verwendung des einen oder des anderen dieser beiden Verhältniswerte für die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden oberen Konjunktionen der Venus mit der Sonne?

183. Welche Länge findet sich in jedem dieser Fälle für die Morgenstern- und die Abendstern-Periode der Venus?

184. Beantworte dieselben Fragen für den Merkur, der zum Umlauf um die Sonne mehr als $\frac{4}{17}$, aber weniger als $\frac{1}{4}$ eines Erdenjahres braucht.

185. Bestimme in entsprechender Weise, wie sich der Merkur für die etwaigen Venusbewohner darstellen wird. Er braucht mehr als $\frac{3}{8}$, aber weniger als $\frac{2}{5}$ eines Venusjahres zu einem Umlauf um die Sonne.

186. Der siderische Monat, d. i. die Zeit eines Mondumlaufs um die Erde, beträgt 27 Tage 7 Stunden und 43 Minuten, das siderische Jahr, d. i. die Zeit eines Erdumlaufs um die Sonne, beträgt 365 Tage 6 Stunden 9 Minuten. Wie lang ist ein synodischer Monat, d. i. die Zeit zwischen zwei Neumonden oder zwei entsprechenden Mondphasen?

187. Vor einer zentralen Sonnenfinsternis stand um 7 Uhr morgens das Zentrum des Mondes auf $80'$ rechts von dem Zentrum der Sonne. Die Sonne hatte einen scheinbaren Durchmesser von $32'$, der Mond von $33'$. Die Sonne legte in jeder Stunde $2\frac{1}{2}'$, der Mond $33'$ zurück. Wann war der Anfang der Finsternis, wann ihr Ende, wann der Zeitpunkt der zentralen Finsternis und wann der der scheinbaren innerlichen Berührung beider Scheiben?

Aufgaben aus alter Zeit.[1])

Aus einer Arithmetik der Chinesen (geht wahrscheinlich bis auf die Zeit um 2000 v. Chr. zurück; verfaßt wohl erst Anfang des 2. Jahrh. v. Chr.):

188. In einem Käfig sind Kaninchen und Fasanen eingesperrt. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wieviel Kaninchen und wieviel Fasanen sind im Käfig?

189. Im Mittelpunkte eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Seitenlänge wächst ein Schilf, das sich einen Fuß über die Wasserfläche erhebt. Als man es an das Ufer nach der Mitte einer Seite hin zog, reichte es gerade bis an den Rand des Teiches. Wie tief ist das Wasser?

190. Ein 10 Fuß hoher Bambus ist oben umgeknickt, so daß seine Spitze 3 Fuß vom untersten Ende des Rohres den Boden berührt. Wie hoch ist die Bruchstelle?

Aus dem Papyrus Rhind des Ahmes (1700 v. Chr.):

191. Haufen[2]), sein Siebentel, sein Ganzes, es macht (ergänze: zusammen) 19.

192. Haufen[2]), sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es beträgt (ergänze: zusammen) 33.

193. Vorschrift zu verteilen 700 Brote unter vier Personen, $\frac{2}{3}$ für einen, $\frac{1}{2}$ für den zweiten, $\frac{1}{3}$ für den dritten, $\frac{1}{4}$ für den vierten[3]).

Heron von Alexandria (um 100 v. Chr.). Erstes Auftreten einer Brunnenaufgabe:

194. Eine Zisterne von 12 Raumeinheiten erhält Wasser durch zwei Röhren, deren eine in jeder Stunde eine, deren andere in jeder Stunde vier Einheiten liefert. In welcher Zeit wird die Füllung von beiden Röhren gemeinsam bewirkt?

Aus griechischen Epigrammen, gesammelt von Maximus Planudes (um 1350):

195.[4]) Vier Springbrunnen es gibt. Die Zisterne anfüllet der erste
Täglich; der andere braucht zwei Tage dazu, und der dritte
Drei, und der vierte gar vier. Welche Zeit nun brauchen zugleich sie?

196. Hier dies Grabmal deckt Diophantus. Schauet das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre

---

1) Mich. Stifel (1553) sagt: „Solliche spöttliche Exempla wöllen oft mehr Wort haben, denn die nutzliche." — Auch die Aufgaben 95, 101 und 102 von § 20 können hier schon gelöst werden.

2) Der Ausdruck Haufen könnte zu der Ansicht verleiten, das Ergebnis müsse eine ganze Zahl sein. Das ist durchaus nicht nötig!

3) Hier muß der Sinn der Aufgabe erst erklärt werden.

4) Auch das ist natürlich eine „Brunnenaufgabe".

Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.[1])
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel.

Aus Bhaskaras Lilavati (indisch; 1150 n. Chr.):

197. Aus einer Menge reiner Lotusblumen wurden Siva der dritte, Vishnu der fünfte, der Sonne der sechste Teil als Opfer dargebracht; den vierten Teil erhielt Bhavani, und die übrigen sechs Blumen wurden dem ehrwürdigen Lehrer gegeben.

198. Von einem Schwarm Bienen läßt $\frac{1}{5}$ sich auf einer Kadambablüte, $\frac{1}{3}$ auf der Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja; eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin und her schwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage mir nun die Anzahl der Bienen.

Nach einer Alcuin (735—804) zugeschriebenen Sammlung:

199. Ein Wanderer trifft mit Schülern zusammen und fragt sie: Wieviel seid ihr in der Schule? Da antwortet einer von ihnen: Nimm unsere Zahl doppelt, multipliziere sie mit 3 und dividiere durch 4. Rechnest du mich noch dazu, dann sind es im ganzen 100.

200. (De cursu cbnks bc fugb lepprks, soll heißen De cursu canis ac leporis) Ein Hund läuft einem Hasen nach. 150 Fuß ist der Hase voraus. Der Hase macht 7 Fuß weite Sprünge, während der Hund 9 Fuß weit springt, nach wieviel Sprüngen holt der Hund den Hasen ein?

Aus Johann Widmanns Behende vnd hübsche Rechenung (1489):

201. Item 1 Leb vnd 1 hunt vnd 1 Wolff. Die essen mit eynander 1 Schoff. Vnd der Leb eß das Schoff alleyn in eyner stund. Vnd der wolff in 4 stunden. Vnd der hunt in 6 stunden. Nu ist die frag, wen sy das Schoff all 3 mit eynander essen in wie langer Zeyt sy das essen.

Aus der Summa de Arithmetica des Luca Paciuolo (1494):

202. Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ Elle hinnnter. Der Baum wächst jeden Tag um $\frac{1}{4}$ Elle und schrumpft in der Nacht um $\frac{1}{8}$ Elle zusammen. Wann erreicht die Katze die Maus und wie hoch ist dann der Baum inzwischen geworden?

Aus Adam Rieses Rechenbuch von 1524:

203. Item 3 gesellen haben gewunnen ein anzal geldes, der erste nimet $\frac{1}{7}$, der ander $\frac{1}{4}$ und der dritte nimet das vberig das ist 17 fl. Nun frage, wieuil des geldes ist das sie gewunnen habn.

204. Item ein Vater vnd eyn sohnn wollen den heiligen Santt peter Zu rom besuchen. Der sohn geth alletag 9 meyl vnd edr vater hat 100

1) Das ist zweideutig. Es kann entweder heißen, daß der Sohn halb so alt geworden ist wie der Vater, oder es kann heißen, daß der Sohn halb so alt geworden ist als der Vater bei des Sohnes Tode war. Löse die Aufgabe unter beiden Voraussetzungen und sieh zu, welches der wahrscheinlichere Sinn ist.

befor und geth alletag 6 meyl. Ist ehr außgangenn dan der sun. In wiuil tagenn komen sie Zusamenn?

205. Item Eynn sohn fraget seinen Vater wie alt er sey. Antwurdt im der Vatter sprechende, Wan du werest noch so alt, aber so alt, halb so alt und 1 Jahr elter, so werestu 134 Jahr alt.

Aus der Coß von Christoff Rudolff (1525):

206. Ein Herr hat einen Diener dem soll er zu jarlon geben 10 fl. u. einen Rock. Der Knecht dienet 7 Monat, u. darnach werden sye mit einander zwytrechtig u. aufftössig, das sye mit einander abrechnen. Trifft die Rechnung den Herrn zu geben dem Knecht den Rock u. 2 fl. Was ist der Rock werdt?

207. Ein Weidmann hetzet einen Fuchs, hat der Fuchs 60 sprüng bevor, u. als offt der Fuchs thut 9 sprüng, so offt thut der Hund 6 sprüng. Aber doch thun 3 Hundsprüng so vil als 7 Fuchssprüng. Ist die Frag wie vil der Hund muß sprüng thun, bis er den Fuchs erhasche?

208. Es steht ein stang im wasser. steck 15 spannen tief vnder dem wasser in der erden. so bedeckt das wasser den vierden teyl der stangen, vnd ob dem wasser in der lufft erscheynet der dritte teyl der stangen. Ist die frag wie vil spannen diese stang hab an yhrer lenge.

Aus Joh. Faulhabers Arithmetischem Wegweiser (1614):

209. Item | Es geht ein Schiff auß dem Sund gen Riga in Liefland das hat 3. Segel | mit dem grösten Segel fährt es in 2. Wochen dahin | mit dem andern in 3. und mit dem kleinesten in 4. Wochen | ist die Frag wann alle 3. Segel zugleich aufgespannt werden | und doch in einem Wind fahren | in wie viel Wochen kommt es gen Riga?

Aus Daniel Schwenters Erquickstunden (1636):

210. Wieviel Pythagoras der Samische Philosophus Schulen gehabt? — Als Pythagoras wegen der Zahl seiner Schüler gefragt wurde | antwortete er: Der halbe theil meiner Schüler studieren die Mathesin der vierdt theil die Physicum | der sibende theil lernt stillschweigen | vnd über diß hab ich noch 3 gar kleiner Knaben | ist die Frag wie viel der Personen gewest.

Scherze und Rätsel.

Untersuche in den folgenden Rechnungen, in denen die bei Gleichungen üblichen Schlußweisen angewandt sind,[1] wo der Fehler steckt:

211. Es ist

$$2 \text{ kg} = 2000 \text{ g}$$
$$5 \text{ kg} = 5000 \text{ g}.$$

Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches, also ist

$$10 \text{ kg} = 10000000 \text{ g}.$$

212. Es ist

$$x^3 - x^2 = x^2 - x^3,$$

1) Es handelt sich in den ersten drei Aufgaben nicht um Bestimmungsgleichungen.

also, wenn man links x als Faktor vor die Klammer zieht und rechts die Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ anwendet,

$$x(x - x) = (x + x) \cdot (x - x).$$

Dividiert man jetzt beide Seiten durch $x - x$, so erhält man das überraschende Resultat

$$x = 2x.$$

213. Wendet man auf die folgenden zwei Sätze:

Eine Katze hat 4 Beine

Keine Katze hat 3 Beine

den Grundsatz an „Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches", so folgt das merkwürdige Ergebnis

Eine Katze hat 7 Beine.

214. Die Gleichung

$$6x + 25 = 10x + 15$$

behandelt jemand folgendermaßen: Es ist

$$3(2x - 5) = 5(2x - 5),$$

folglich

$$3 = 5.$$

Wie kann man die wirkliche Lösung sofort aus der zweiten Gleichung ablesen?

215. Die Gleichung

$$\frac{x + 5}{x - 7} - 5 = \frac{4x - 40}{13 - x}$$

behandelt jemand folgendermaßen. Er rechnet:

$$\frac{x + 5 - 5(x - 7)}{x - 7} = \frac{4x - 40}{13 - x}$$

$$\frac{-4x + 40}{x - 7} = \frac{4x - 40}{13 - x}$$

$$\frac{4x - 40}{7 - x} = \frac{4x - 40}{13 - x}$$

und folgert daraus, daß $7 = 13$ ist.

216. Eine Flasche kostet mit Korken 11 ₰; die Flasche kostet 10 ₰ mehr als der Korken. Wieviel kostet der Korken, wieviel die Flasche? (Gib die Lösung gleich ohne Rechnung nur auf Grund sofortiger Überlegung an und mache die Probe!)

217. Einen Strick denke man sich um den Erdäquator gelegt; er sei etwas zu lang dazu, es mögen etwa 10 m übrig bleiben. Man denke sich trotzdem die Enden des Strickes aneinandergelegt, so daß der Strick rings um die Erde herum ein wenig gelockert wird und, man nehme das der Einfachheit halber so an, um ein geringes, aber überall um das gleiche Stück, von der Erdoberfläche absteht. Wie groß ist der Abstand? Könnte wohl eine Fliege zwischen der Erde und dem gelockerten Strick durchkriechen?

218. Man fragte einen Knaben, wieviel Geschwister er habe. Er sagte: Ebensoviel Brüder wie Schwestern. Da fragte man seine Schwester, wieviel Geschwister

sie habe. Sie sagte: Ich habe nur halbsoviel Schwestern als Brüder. Wie ist das möglich?

219. Vier Knaben machten einen Ausflug. Als es ans Frühstücken ging, holte der erste vier, der zweite drei, der dritte ein Brötchen heraus. Der vierte hatte kein Brötchen mitgebracht. Der Eßvorrat wurde gleichmäßig verteilt und verzehrt. Als Entgelt verteilte der vierte 40 ₰, die ihm die Mutter mitgegeben, nach der Zahl der Brötchen an die anderen drei, so daß der erste 20 ₰, der zweite 15 ₰, der dritte 5 ₰ erhielt. Damit war aber der erste nicht einverstanden. Mit welchem Recht? Welche Verteilung ist gerechter?

220. Ein alter Araber hatte 17 Kamele und drei Söhne. Bei seinem Tode vermachte er dem jüngsten Sohne die Hälfte, dem mittleren ein Drittel, dem ältesten ein Neuntel seines Besitztums. Als man nun die Verteilung der Kamele vornehmen wollte, war man erst ratlos, bis einer vorschlug: wir gehen zum Nachbar und borgen uns ein Kamel; dann haben wir 18. Jetzt bekommt der erste die Hälfte, also 9, der zweite ein Drittel, also 6, der dritte ein Neuntel, also 2. Eins bleibt übrig, das bekommt der Nachbar dann wieder zurück. Wie ist das zu erklären?

221. Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab. Wieviel Pflaumen enthielt ein Korb, aus dem sie dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch 3 Pflaumen geben konnte, wenn dadurch der Korb geleert wurde?

222. Eine Frau brachte Eier in die Stadt. Beim ersten Kunden verkaufte sie die Hälfte ihres Vorrates und ein Ei. Der zweite nahm ihr von dem Rest wieder die Hälfte und ein Ei ab. Ein dritter Kunde nahm ihr wieder von dem, was übrig blieb, die Hälfte und ein Ei ab. 10 Eier blieben da noch übrig. Wieviel hatte sie zur Stadt gebracht?

223. Eine Anekdote erzählt von einem Postmeister, den jemand fragte, wieviel Pferde der „Alte Fritz" zum Wechseln auf der Poststation bestellt hatte. Er sagte: Mit der Hälfte der bestellten Pferde und einem halben fährt der König selbst. Mit der Hälfte des Restes und einem halben fährt der Minister, mit der Hälfte des bleibenden Restes und einem halben Pferde fahren die Diener. Das übrigbleibende letzte Pferd benutzt der Vorreiter. Wieviel Pferde waren bestellt?

§ 18. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

Additionsmethode.

Stelle bei den folgenden Gleichungspaaren durch Addition oder Subtraktion eine Gleichung für nur eine Unbekannte her, berechne sie und suche die andere Unbekannte in der gleichen Weise oder aus einer der Ausgangsgleichungen:

1. $x + y = 347$
$x - y = 153.$

2. $x + 5y = 573$
$x + y = 181.$

3. $3x + y = 73$
$2x - y = 32.$

4. $4x + 3y = 97$
$7x + 3y = 127.$

5. $5x + 7y = 176$
$5x - 3y = 46.$

6. $2x - 3y = 100$
$2x + y = 156.$

7. $x + y = a$
$x - y = b.$

8. $x + y = \frac{1}{2}(5a + b)$
$x - y = \frac{1}{2}(a + 5b).$

9. $ax + y = m$
$x - y = n.$

10. $x + my = a$
$x - ny = b.$

In den folgenden Gleichungspaaren ist jedesmal die eine Gleichung mit einer geeigneten Zahl derart zu multiplizieren, daß man dann in der Weise wie eben verfahren kann.

11. $x + 4y = 37$
$2x + 5y = 53.$

12. $7x + 3y = 100$
$3x - y = 20.$

13. $2x + 5y = 1$
$6x + 7y = 3.$

14. $8x - 15y = -30$
$2x + 3y = 15.$

15. $5x + 6y = 529$
$3x + 2y = 431.$

16. $24x + 7y = 27$
$8x - 33y = 115.$

In den folgenden Gleichungspaaren sind beide Gleichungen erst mit geeigneten Zahlen derart zu multiplizieren, daß die Additionsmethode zur Berechnung der einen Unbekannten führt, dann ist Entsprechendes zur Berechnung der anderen Unbekannten zu tun:

17. $2x + 3y = 41$
$3x + 2y = 39.$

18. $5x + 7y = 17$
$7x - 5y = 9.$

19. $11x + 12y = 100$
$9x + 8y = 80.$

20. $18x - 35y = -13$
$15x + 28y = 275.$

21. $3x + 7y = 7$
$5x + 3y = -36.$

22. $3x + 16y = 5$
$28y - 5x = 19.$

23. $5x + 3y + 2 = 0$
$3x + 2y + 1 = 0.$

24. $21x + 8y + 66 = 0$
$23y - 28x + 13 = 0$

25. $10x + 7y + 4 = 0$
$6x + 5y + 2 = 0.$

26. $x = 3y - 19$
$y = 3x - 23.$

27. $23x + 15y = 4\frac{1}{4}$
$48x + 45y = 18.$

28. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 6$
$3x - 4y = 4.$

29. $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + 1$
$\frac{1}{4}x = \frac{4}{3}y - 10.$

30. $\frac{1}{3}y = \frac{1}{2}x - 1$
$\frac{1}{4}y = \frac{2}{5}x - 1.$

31. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = 17$
$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 19.$

32. $2\frac{1}{4}x = 3\frac{1}{3}y + 4$
$2\frac{1}{5}y = 3\frac{1}{3}x - 47.$

33. $4\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{5}y = 12$
$3\frac{1}{4}x - 3\frac{2}{5}y = 5.$

34. $5\frac{1}{2}x - 1\frac{2}{5}y = 19$
$6\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{2}y = 15.$

35. $7x - 5y = 3{,}042$
$3x - 2y = 1{,}323.$

36. $1{,}5x - 2y = 1$
$2{,}5x - 3y = 6.$

37. $5x - 4{,}9y = 1$
$3x - 2{,}9y = 1.$

38. $7x - 10y = 0{,}1$
$11x - 16y = 0{,}1.$

39. $5x - 4y + 1 = 0$
$1{,}7x - 2{,}2y + 7{,}9 = 0.$

40. $0{,}16x - 0{,}04y = 1$
$0{,}19x - 0{,}11y = 1.$

41. $2{,}7x + 2{,}6y = 8{,}8$
$0{,}9x + 2{,}2y = 4{,}4.$

42. $3{,}9x - 0{,}08y = 2{,}77$
$26x + 0{,}4y = 18.$

43. $27{,}4x - 31{,}5y = 11$
$21{,}4x - 26{,}5y = 1.$

44. $25{,}9x - 60{,}1y = 1$
$24{,}1x - 55{,}9y = 1.$

45. $2x - 3y = 5b - a$
$3x - 2y = a + 5b.$

46. $2x - 3y = -5a$
$3x - 2y = -5b.$

47. $5x + 3y = 4a + b$
$3x + 5y = 4a - b.$

48. $7x - 5y = 24a$
$5x - 7y = 24b.$

49. $3x + 2y = 5a^2 + ab + 5b^2$
$3y + 2x = 5a^2 - ab + 5b^2.$

50. $3x - 2y = a^2 + 5ab + b^2$
$3y - 2x = a^2 - 5ab + b^2.$

51. $3x - y = 2(a + b)^2$
$3y - x = 2(a - b)^2.$

52. $5x - 2y = 3(a + 7c)$
$5y - 2x = 3(a + 7b).$

Substitutionsmethode.

Löse in den folgenden Gleichungspaaren die eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setze den Wert in die zweite Gleichung ein. Dann bestimme die noch übrigbleibende Unbekannte und danach die vorher eliminierte Unbekannte.

53. $3x + 4y = 253$
$y = 5x.$

54. $2x - 11y = -95$
$x - 3y = 0.$

55. $5x - 4y = 6$
$8x = 7y.$

56. $7x - 3y = 27$
$5x - 6y = 0.$

57. $x = 3y$
$8x - 7y = 85.$

58. $9x - 4y = 99$
$x = \frac{5}{3}y.$

59. $15x - 16y = 24$
$3x = 4y.$

60. $5x = 7y$
$11x - 14y = 21$

61. $x : y = 3 : 4$
$(x - 1) : (y + 2) = 1 : 2.$

62. $(x + 4) : (y + 1) = 2 : 1$
$(x + 2) : (y - 1) = 3 : 1.$

63. $mx + ny = c$
$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$

64. $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$
$x - y = (a - b)^2.$

65. $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$
$x - y = a^2 - b^2.$

66. $\frac{x + 1}{y} = a$
$\frac{y + 1}{x} = b.$

Man kann auch beide Gleichungen eines Gleichungspaares nach ein und derselben Unbekannten auflösen und die beiden gefundenen Ausdrücke gleichsetzen (Gleichsetzungsmethode):

67. $x + 3y = 20$, $x - 5y = 12.$

68. $5x + y = 40$, $3x + y = 26.$

69. $x = 3y - 2$, $x = 5y - 12.$

70. $y = 3x - 17$, $y = 2x - 12.$

71. $2x = 3y + 1$, $3x = 7y - 6.$

72. $5y = 2x + 1$, $8y = 5x - 11.$

73. $x = 6 - y$, $y = 3x - 4.$

74. $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2.$

Zuweilen kann man statt nach der einen Unbekannten auch nach ein und demselben Vielfachen der Unbekannten auflösen:

75. $3x - 2y = 9$, $3x + 7y = 36.$

76. $7x + y = 32$, $5x - y = 16.$

77. $7x + 8y - 37 = 0$, $7x - 8y - 5 = 0.$

78. $y = mx + a$, $2y = mx + b.$

79. $ax + by = a^2 + b^2$, $ax - cy = a^2 - bc.$

Vermischte Beispiele.

80. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}.$

81. $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$, $\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4.$

82. $\frac{1,6}{x} - \frac{2,7}{y} = -1$, $\frac{0,8}{x} + \frac{3,6}{y} = 5$

83. $17x - \frac{0,3}{y} = 3$, $16x - \frac{0,4}{y} = 2.$

84. $\frac{x}{3} + \frac{5}{y} = 4\frac{1}{3}$, $\frac{x}{6} + \frac{10}{y} = 2\frac{2}{3}$

85. $\frac{5x}{0,7} + \frac{0,3}{y} = 6$, $\frac{10x}{7} + \frac{9}{y} = 31.$

86. $5(x + 2) - 3(y + 1) = 23$, $3(x - 2) + 5(y - 1) = 19.$

87. $3(2x - y) + 4(x - 2y) = 87$, $2(3x - y) - 3(x - y) = 82.$

88. $4(2x - 3) + 5(9 - 2y) = 3(2x - 9)$, $7(17 - 5x) - 2(y - 13) = 4(3 - 2y).$

89. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}(y + 1) = 1$, $\frac{1}{3}(x + 1) + \frac{3}{4}(y - 1) = 9.$

90. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y + 1) = 1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{2}y = 4\frac{1}{2}.$

91. $\frac{5}{x+2y} = \frac{7}{2x+y}$
$\frac{7}{3x-2} = \frac{5}{6-y}$.

92. $\frac{1}{3x+1} = \frac{2}{5y+4}$
$\frac{1}{4x-3} = \frac{2}{7y-6}$.

93. $\frac{x+3y}{x-y} = 8$
$\frac{7x-13}{3y-5} = 4$.

94. $\frac{15x+1}{45-y} = 8$
$\frac{12y+19}{x-10} = 25$

95. $\frac{3x+1}{4-2y} = \frac{4}{3}$
$x+y=1$.

96. $\frac{7-2x}{5-3y} = \frac{3}{2}$
$y-x=4$.

97. $\frac{x-3}{y+2} = \frac{2}{3}$
$\frac{x+1}{y-2} = \frac{3}{2}$.

98. $\frac{8x+1}{1{,}5-y} = 11$
$\frac{7y+0{,}3}{2x-0{,}3} = 6$.

99. $\frac{x+2y+1}{2x-y+1} = 2$
$\frac{3x-y+1}{x-y+3} = 5$.

100. $\frac{x+3y+13}{4x+5y-25} = 3$
$\frac{8x+y+6}{5x+3y-23} = 5$.

101. $\frac{x-1}{x+15} = \frac{y-6}{y+2}$
$\frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y-1}$.

102. $\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5}$
$\frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y-x$.

103. $(x+1):(y+1):(x+y) = 3:4:5$.

104. $(x+1):(y+1):(x+y-2) = 2:3:4$.

105. $(x-2):(y+1):(x+y-3) = 3:4:5$.

106. $(x-5):(y+9):(x+y+4) = 1:2:3$.

107. $(2x+y-1):(3x+2y+11) = 1:2$
$(5x-3y+4):(6x-3y+3) = 3:4$.

108. $(x+y-4):(2x+y+1) = 1:2$
$(2x+y-9):(x+2y+7) = 3:4$.

109. $(x-4)(y+7) = (x-3)(y+4)$
$(x+5)(y-2) = (x+2)(y-1)$.

110. $(x+3)(y+5) = (x+1)(y+8)$
$(2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1)$.

111. $ax+by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2+b^2$.

112. $ax+by = a^3+2a^2b+b^3$
$bx+ay = a^3+2ab^2+b^3$.

113. $x+y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x-y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$.

114. $ax+by = 2a$
$x+y = \frac{a^2+b^2}{ab}$.

115. $x + y = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

$2x + 3y = \frac{2a^2 + ab + 3b^2}{a^2 - b^2}.$

116. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$

$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}.$

117. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$

$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = c_1.$

118. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c$

$\frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} = c_1.$

119. $(a - b)x + (a + b)y = a + b$

$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}.$

120. $(a - b)x + y = \frac{a + b + 1}{a + b}$

$x + (a + b)y = \frac{a - b + 1}{a - b}.$

121. $(a + b - c)x - (a - b + c)y = 4a(b - c)$

$x : y = (a + b - c) : (a - b + c).$

122. $(x + y) : (x - y) = a : (b - c)$

$(x + c) : (y + b) = (a + b) : (a + c).$

123. $\frac{x+1}{y+1} = \frac{a+b+c}{a-b+c}$

$\frac{x-1}{y-1} = \frac{a+b-c}{a-b-c}.$

124. $\frac{x-y+1}{x-y-1} = a$

$\frac{x+y+1}{x+y-1} = b.$

125. $\frac{x+y+1}{x-y+1} = \frac{a+1}{a-1}$

$\frac{x+y+1}{x-y-1} = \frac{1+b}{1-b}.$

126. $\frac{x-y+1}{x+y-1} = a$

$\frac{x+y+1}{x-y-1} = b.$

Lösungsfragen.

Untersuche die folgenden Gleichungen daraufhin, ob sie Lösungen haben oder nicht

127. $x - 3y = 5$

$3x - 9y = 15.$

128. $7x - 5 = 6y + 3$

$y + 8x - 7 = x + 7y + 5.$

129. $3(x + y) = 7$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

130. $y = 3x + 5$

$3y = 9x + 7.$

131. $x = \frac{y - 16}{3}$

$x = \frac{y + 3}{3}.$

132. $y - x = 0$

$2y = 2x + 2b.$

133. Vorgelegt sind die Gleichungen

$$y + x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{2} = 13 - \frac{y}{2}.$$

Jemand rechnet so: Nach der zweiten Gleichung ist $x = 26 - y$. Setze ich das in die erste Gleichung ein, so erhalte ich $26 = 0$. Folglich ist bewiesen, daß $26 = 0$ ist. Was ist an dieser Schlußweise auszusetzen?

Bilde zu den folgenden Gleichungen je eine zugehörige Gleichung, die mit ihr im Widerspruch steht:

134. $x + y = 5$. **135.** $3x + 4y = 7$.

136. $12x - y = 8$. **137.** $x : y = 2 : 3$.

Füge zu den folgenden Gleichungen je eine Gleichung derart hinzu, daß das entstehende Gleichungspaar unbestimmt wird:

138. $x - y = 3$. **139.** $x + y = 0$.

140. $\frac{x}{2} + \frac{3y}{4} = 5$. **141.** $3x + 2y = 15$.

§ 19. Gleichungen ersten Grades mit drei und mehr Unbekannten.

Gleichungen mit drei Unbekannten.

1. $x + y = 37$, $x + z = 25$, $y + z = 22$.

2. $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$.

3. $2x + 3y = 12$, $3x + 2z = 11$, $3y + 4z = 10$.

4. $2x + 2y = 7$, $7x + 9z = 29$, $y + 8z = 17$.

5. $5x + 3y = 13$, $7x - 3z = 8$, $3y + 5z = 11$.

6. $1{,}3x - 1{,}9y = 1$, $1{,}7y - 1{,}1z = 2$, $2{,}9z - 2{,}1x = 3$.

7. $x + y + z = 100$, $3x - 2z = 4$, $5y = 4z$.

8. $x + y + z = 36$, $4x = 3y$, $2x = 3z$.

9. $5x + 3y + 2z = 217$, $5x - 3y = 39$, $3y - 2z = 20$.

10. $x + y + z = 100$, $y = 0{,}7x - 4$, $z = 0{,}3x + 4$.

11. $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = 0$, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}z = 1$, $\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}y = 2$.

12. $1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}y = 10$, $2\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{5}z = 20$, $3\frac{1}{4}y + 3\frac{2}{5}z = 30$.

13. $2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{3}y + 4\frac{1}{4}z = 64$, $3\frac{3}{4}x = 2\frac{1}{2}y$, $3\frac{1}{3}y = 2\frac{1}{2}z$.

14. $x = 2\frac{1}{3}y - 6$, $y = 3\frac{1}{2}z - 1$, $z = 1\frac{1}{4}x - 8$.

15. $x + y - z = 17$, $x + z - y = 13$, $y + z - x = 7$.

16. $y + z - x = a$, $z + x - y = b$, $x + y - z = c$.

17. $x + y + z = 99$, $x : y : z = 5 : 3 : 1$.

18. $x + y + z = m$, $x : y : z = a : b : c$.

19. $x + y + z = 26$
$x : z = 11 : 7$
$y : z = 14 : 9.$

20. $ax + by + cz = r$
$x : y = m : n$
$y : z = p : q.$

21. $x + y + z = 9$
$x + 2y + 4z = 15$
$x + 3y + 9z = 23.$

22. $x + y + z = 3$
$2x + 4y + 8z = 13$
$3x + 9y + 27z = 34.$

23. $7x + 6y + 7z = 100$
$x - 2y + z = 0$
$3x + y - 2z = 0.$

24. $3x + 2y + 3z = 110$
$5x + y - 4z = 0$
$2x - 3y + z = 0.$

25. $x + y + z = 9$
$x + 2y + 3z = 14$
$x + 3y + 6z = 20.$

26. $x + 2y + 3z = 32$
$2x + 3y + z = 42$
$3x + y + 2z = 40.$

27. $2x + 3y + 4z = 14$
$3x - 2y - z = 12$
$5x + 4y + 3z = 14.$

28. $3x + 3y + z = 17$
$3x + y + 3z = 15$
$x + 3y + 3z = 13.$

29. $5x - y + 3z = a$
$5y - z + 3x = b$
$5z - x + 3y = c.$

30. $7x + 11y + z = a$
$7y + 11z + x = b$
$7z + 11x + y = c.$

31. $x + 2y + 3z = 15{,}4$
$3x + 5y + 7z = 37{,}4$
$5x + 8y + 11z = 59{,}5.$

32. $x + 2y - z = 4{,}6$
$y + 2z - x = 10{,}1$
$z + 2x - y = 5{,}7.$

33. $\frac{x+1}{y+1} = 2$
$\frac{y+2}{z+1} = 4$
$\frac{z+3}{x+1} = \frac{1}{2}.$

34. $\frac{3x+y}{z+1} = 2$
$\frac{3y+z}{x+1} = 2$
$\frac{3z+x}{y+1} = 2.$

35. $\frac{x+y}{y-z} = 10$
$\frac{x+z}{x-y} = 9$
$\frac{y+z}{x+5} = 1.$

36. $\frac{x+3}{y+z} = 2$
$\frac{y+3}{x+z} = 1$
$\frac{z+3}{x+y} = \frac{1}{2}.$

37. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2c.$

38. $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1$
$\frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 4$
$\frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 0.$

39. $\frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4$
$\frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{5}{z} = 4$
$\frac{9}{x} + \frac{12}{y} - \frac{10}{z} = 4.$

40. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{12}$
$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = \frac{5}{6}$
$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = 2\frac{3}{4}.$

41. $\frac{1}{x} - \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = 2$
$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$
$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{6}{z} = 3.$

42. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{b}$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{c}.$

43. $ax + by - cz = 2ab$
$by + cz - ax = 2bc$
$cz + ax - by = 2ac.$

44. $(a + b)x + (a - b)z = 2bc$
$(b + c)y + (b - c)x = 2ac$
$(c + a)z + (c - a)y = 2ab$

Untersuche die folgenden Gleichungen, ob sie Lösungen haben oder nicht:

45. $x + y = 28$
$x + z = 30$
$2x + y + z = 58.$

46. $x + y = 33$
$y - z = 10$
$x + z = 23.$

47. $2x = 5z$
$3y = 4z$
$8x = 15y.$

48. $x = 2y$
$4y = 5z$
$2x = 7z.$

49. $x : y = 2 : 3$
$y : z = 5 : 6$
$x : z = 5 : 9.$

50. $2x + y = 7$
$2y + z = 9$
$4x - z = 1.$

Gleichungen mit vier Unbekannten.

51. $x : y : z : u = 2 : 3 : 4 : 5$
$x + y + z + u = 7.$

52. $x : y : z : u = 1 : 2 : 3 : 4$
$9x + 7y + 3z + 2u = 200.$

53. $x : y : z : u = a : b : c : d$
$mx + ny + pz + qu = r$

54. $x : y = 2 : 1$
$x : z = 3 : 1$
$y : u = 3 : 1$
$\frac{y^2 - z^2}{x - u} = 1.$

55. $y + z = au$
$x + z = bu$
$x + y = cu$
$\frac{1 - x}{1 - y} = \frac{a}{b}.$

56. $x + 2y = 5$
$y + 2z = 8$
$z + 2u = 11$
$u + 2x = 6.$

57. $x + y = m$
$y + z = a$
$z + u = n$
$u - x = b.$

58. $y + z + u = a$
$z + u + x = b$
$u + x + y = c$
$x + y + z = d.$

59. $x + y - z = a$
$y + z - u = b$
$z + u - x = c$
$u + x - y = d.$

60. $x + 3y - z = 1$
$y + 3z - u = 4$
$z + 3u - x = 11$
$u + 3x - y = 2.$

61. $3x + y + z = 20$
$x + 4y + 3u = 30$
$6x + z + 3u = 40$
$8y + 3z + 5u = 50.$

62. $7x + 5y + z - u = a$
$7y + 5z + u - x = b$
$7z + 5u + x - y = c$
$7u + 5x + y - z = d.$

63. $11x + 9y + z - u = a$
$11y + 9z + u - x = b$
$11z + 9u + x - y = c$
$11u + 9x + y - z = d.$

Gleichungen mit fünf Unbekannten.

64. $x + 3y = 19$
$y + 3z = 8$
$z + 3u = 7$
$u + 3v = 11$
$v + 3x = 15.$

65. $x + y = a$
$y + z = b$
$z + u = c$
$u + v = d$
$v + x = e.$

66. $2x + y + z = 5$
$2y + z + u = 5$
$2z + u + v = 7$
$2u + v + x = 12$
$2v + x + y = 11.$

67. $x + 2y - z = 12$
$y + 2z - u = 10$
$z + 2u - v = 8$
$u + 2v - x = 1$
$v + 2x - y = 9.$

68. $x + y + z = a$
$y + z + u = b$
$z + u + v = c$
$u + v + x = d$
$v + x + y = e.$

69. $x - y + z = a$
$y - z + u = b$
$z - u + v = c$
$u - v + x = d$
$v - x + y = e.$

70. $x + y - u = a$
$y + z - v = b$
$z + u - x = c$
$u + v - y = d$
$v + x - z = e.$

71. $x + y - z = a$
$y + z - u = b$
$z + u - v = c$
$u + v - x = d$
$v + x - y = e.$

72. $y + z + u + v = a$
$z + u + v + x = b$
$u + v + x + y = c$
$v + x + y + z = d$
$x + y + z + u = e.$

73. $x + y + z - u = a$
$y + z + u - v = b$
$z + u + v - x = c$
$u + v + x - y = d$
$v + x + y - z = e.$

74.
$$\begin{aligned} y+z+u+v-x&=a\\ z+u+v+x-y&=b\\ u+v+x+y-z&=c\\ v+x+y+z-u&=d\\ x+y+z+u-v&=e. \end{aligned}$$

75.
$$\begin{aligned} x+y+z-u-v&=a\\ y+z+u-v-x&=b\\ z+u+v-x-y&=c\\ u+v+x-y-z&=d\\ v+x+y-z-u&=e. \end{aligned}$$

76.
$$\begin{aligned} x+y+z+u+v&=15\\ x+2y+4z+8u+16v&=57\\ x+3y+9z+27u+81v&=179\\ x+4y+16z+64u+256v&=453\\ x+5y+25z+125u+625v&=975. \end{aligned}$$

§ 20. Eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit zwei und mehr Unbekannten.

Vorübungen.[1]

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1. Welche Zahlen haben zur Summe 1735 und zur Differenz 555?

2. Die Differenz zweier Zahlen ist $3\frac{1}{3}$, ihre Summe $9\frac{1}{9}$. Wie heißen sie?

3. Zwei Zahlen, von denen die eine um 0,909 größer ist als die andere, haben zur Summe 3,191. Wie heißen sie?

4. Wie heißen die beiden Zahlen, deren Summe gleich a und deren Differenz gleich b ist?

5. Die Summe zweier Zahlen beträgt 1000. Das Doppelte der einen und das Dreifache der anderen ergeben zusammen 2222. Wie heißen die Zahlen?

6. Welche Zahlen genügen folgenden Bedingungen: Vermehrt man die erste um a, so ist sie $m$mal so groß als die zweite; vermehrt man die zweite um b, so ist sie $n$mal so groß als die erste.

7. Welche Zahlen genügen folgenden Bedingungen: Vermehrt man die erste um das $m$fache der zweiten, so ist die Summe a; vermehrt man die zweite um das $n$fache der ersten, so ist die Summe b.

8. Welche Zahlen haben folgende Eigenschaften: Multipliziert man die erste mit 5 und die zweite mit 7, so ist ihre Summe gleich 100; multipliziert man die erste mit 7 und die zweite mit 5, so ist ihre Summe gleich 116.

9. Multipliziert man die erste von zwei Zahlen mit 3, die zweite mit 8, so ist die Summe der Produkte gleich 310; dividiert man die erste durch 3, die zweite durch 8, so gibt die Summe der Quotienten 10. Wie heißen die Zahlen?

10. Die Summe zweier Zahlen beträgt 350. Dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man 8 zum Quotienten und 8 zum Rest. Wie heißen die Zahlen?

11. Zwei Zahlen sind zu finden, deren Summe und Quotient beide gleich **a)** 3, **b)** a sind.

12. Es sind zwei Zahlen zu finden, deren Differenz und Quotient beide gleich **a)** 4, **b)** a sind.

13. Wie heißen die beiden Zahlen, deren Differenz, Summe und Produkt sich wie 1 : 2 : 3 verhalten?

---

[1] Nicht wenige der folgenden Gleichungen lassen sich auch mit einer Unbekannten sehr einfach lösen. Achte auch auf diese Möglichkeit und beurteile beide Verfahren!

14. Die Summe zweier Zahlen beträgt 30, die Differenz ihrer Quadrate 120. Welches sind die Zahlen?

15. Ich denke mir eine zweiziffrige Zahl. Stelle ich die Ziffern um und addiere die neue Zahl zur alten, so erhalte ich 77; dividiere ich aber die alte Zahl durch die neue, so erhalte ich 2, Rest 2. Welche Zahl habe ich mir ursprünglich gedacht?

16. Eine zweiziffrige Zahl wird um 9 größer, wenn man ihre Ziffern umstellt. Dividiert man die ursprüngliche Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man zum Quotienten 4 und zum Rest 3. Welches ist die ursprüngliche Zahl?

17. Dividiert man eine zweiziffrige Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man 8, Rest 2; vertauscht man aber die Ziffern der ursprünglichen Zahl und dividiert nun durch die um 1 vermehrte Quersumme, so erhält man 2, Rest 6. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

18. Vermehrt man eine zweiziffrige Zahl um 3 und stellt dann die Ziffern um, so erhält man eine um 12 größere Zahl als die ursprüngliche; dividiert man die ursprüngliche Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man 6, Rest 3. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

19. Ein Bruch wird gleich $\frac{1}{3}$, wenn man seinen Zähler um 3 vermindert und seinen Nenner um 2 vermehrt; dagegen nimmt er den Wert $\frac{3}{4}$ an, wenn man den Zähler um 1 vermehrt, den Nenner um 1 vermindert. Wie heißt der Bruch?

20. Wenn man in einem Bruche zum Zähler den Nenner addiert und vom Nenner den Zähler subtrahiert, so erhält der Bruch den Wert 14; wenn man aber zum Zähler des ersten Bruches den um 8 verminderten Nenner addiert und vom Nenner den um 8 verminderten Zähler subtrahiert, so erhält man einen neuen Bruch im Werte 2. Wie heißt der ursprüngliche Bruch?

21. Von einem Bruche sind folgende Eigenschaften bekannt: Vermindert man den Zähler um 4 und vermehrt den Nenner um 1, so erhält man $\frac{1}{2}$; addiert man aber zum Zähler den Nenner und subtrahiert vom Nenner die Zahl 5, so wird der Bruch gleich 3. Wie heißt der Bruch?

22. Welcher Bruch geht in $\frac{1}{5}$ über, wenn man Zähler und Nenner um 11 vermindert; in $\frac{1}{7}$, wenn man Zähler und Nenner um 12 vermindert?

23. Ein Bruch, der dem Werte nach gleich $\frac{3}{4}$ ist, verwandelt sich seinem Werte nach in $\frac{5}{7}$, wenn man Zähler und Nenner um 6 vermindert. Wie heißt er?

24. Welcher Bruch geht seinem Werte nach in $\frac{1}{2}$ über, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermehrt, in $\frac{1}{4}$, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermindert?

Kleide folgende Gleichungen in Worte:

25. $\frac{x+y}{2} = 4$, $\frac{x-y}{2} = 1$

26. $y + 5x = 40$, $y + 3x = 26.$

27. $x = 3y - 2$, $x = 5y - 12.$

28. $ax + by = c$, $mx - ny = 0.$

29. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, $\frac{x+1}{y+1} = \frac{5}{7}.$

30. $3x - 2y = 11$, $2x + 3y = 16.$

31. Setzt man von zwei zweiziffrigen Zahlen die erste vor die zweite, so ist die so entstandene Zahl um 9 größer, als das 58fache der zweiten Zahl. Setzt man aber die zweite Zahl vor die erste, so entsteht eine Zahl, die 176mal so groß ist als die erste Zahl. Wie heißen die beiden Zahlen?

32. Zwei mit denselben Ziffern geschriebene Zahlen unterscheiden sich um 36. Vermehrt man die kleinere von ihnen um ihre Zehnerziffer und das Vierfache der Einerziffer, so erhält man 100. Welche Zahlen sind dies?

33. Es gibt zwei dreiziffrige Zahlen, deren Summe 999 beträgt. Die Zahl, die dadurch entsteht, daß man die zweite dieser Zahlen vor die erste setzt, ist sechsmal so groß als die, die durch Vorsetzen der ersten Zahl vor die zweite entsteht. Wie heißen die beiden Zahlen?

34. Zwei andere Zahlen genügen der ersten Bedingung der vorigen Aufgabe; die beiden Zahlen, welche man aus der Zusammensetzung der beiden fraglichen Zahlen erhält, verhalten sich jedoch wie 2 : 5. Welches sind die Zahlen?

35. Die Summe zweier Zahlen beträgt 15390, die erste ist einziffrig, die zweite fünfziffrig. Setzt man die erste vor die zweite, so ist die so entstandene Zahl viermal so groß als die Zahl, welche man erhält, wenn man die erste hinter die zweite setzt. Wie heißen die beiden Zahlen?

Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.[1])

36. Ich habe drei Zahlen in Gedanken. Die doppelte erste und die zweite geben zusammen 75, die doppelte zweite und die dritte 65, die doppelte dritte und die erste 55. Wie heißen die Zahlen?

37. Die Summe dreier Zahlen beträgt 100. Dividiert man die zweite durch die erste, so erhält man 5 zum Quotienten und 1 als Rest. Dividiert man die dritte durch die zweite, so erhält man dasselbe Resultat. Wie heißen die drei Zahlen?

38. Es gibt drei Zahlen von folgender Beschaffenheit. Vermindert man die erste und zweite um je 3, so verhalten sich die neuentstandenen Zahlen wie 1 : 2; vermindert man die erste und dritte um je 4, so verhalten sich die neuentstandenen Zahlen wie 1 : 3; vermehrt man die zweite und dritte um je 5, so erhält man Zahlen die sich wie 3 : 4 verhalten. Welche Zahlen sind das?

39. Es sollen drei Zahlen gesucht werden. Addiert man die Summe je zweier zur doppelten dritten, so erhält man der Reihe nach die Summen 60, 54 und 50. Wie heißen die drei Zahlen?

40. Es sollen drei Zahlen gesucht werden. Addiert man je eine zur dreifachen Summe der beiden anderen, so erhält man der Reihe nach die Summen 19, 27 und 31. Wie heißen die Zahlen?

41. Es gibt drei Zahlen, die sich verhalten wie 2 : 3 : 4 und deren Summe 999 ist. Wie heißen sie?

42. Eine dreiziffrige Zahl mit der Quersumme 15 wird um 99 kleiner, wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Dividiert man die mittlere Ziffer durch die Summe der beiden anderen, so erhält man 1, Rest 1. Wie heißt die dreiziffrige Zahl?

Vermischte Aufgaben.

43. Bei einer Abstimmung wurde ein Antrag bei 50 Stimmen mit 16 Stimmen Majorität angenommen. Wieviel Stimmen waren für, wieviel gegen den Antrag?

---

1) Versuche auch, ob man bei einzelnen der Gleichungen 36—42 mit weniger als drei Unbekannten auskommt!

44. Auf einem Schulausflug hat Karl für zwei Butterbrote und ein Glas Milch 85 ₰, Alfred für ein Butterbrot und zwei Glas Milch 65 ₰ bezahlt. Wieviel kostet ein Butterbrot, wieviel ein Glas Milch?

45. Jemand werden zwei Sorten Wein angeboten und zwar 15 Flaschen der ersten und 20 Flaschen der zweiten Sorte zusammen für 75 ℳ. Er bestellt jedoch umgekehrt 15 Flaschen der zweiten und 20 Flaschen der ersten Sorte; die Rechnung lautet nun um 15 ℳ höher. Wie teuer rechnet der Weinhändler die Flasche von jeder Sorte?

46. Ein Vater und sein Sohn sind jetzt zusammen 80 Jahre alt. Vor 4 Jahren war der Vater gerade 8mal so alt als sein Sohn. Wie alt ist jeder?

47. Ein Vater ist jetzt 36 Jahre älter als sein Sohn. Nach 5 Jahren wird der Vater $3\frac{1}{4}$mal so alt als sein Sohn sein. Wie alt ist jeder?

48. Ein Vater war vor 4 Jahren $5\frac{1}{5}$mal so alt als sein Sohn; nach 4 Jahren wird er $3\frac{1}{3}$mal so alt sein als der Sohn. Wie alt ist jeder?

49. Jemand hat von seinem Kapital jährlich 2160 ℳ Zinsen. Hätte er es um $\frac{1}{2}$% höher ausgeliehen, so hätte er jährlich 240 ℳ Zinsen mehr. Wie groß ist das Kapital, und zu wieviel Prozent stand es?

50. Ein Kapital trägt jährlich a ℳ Zinsen. Stände es um p% höher, so trüge es d ℳ Zinsen mehr. Wie groß sind Kapital und Zinsfuß?

51. Ein Lehrer gab seinem Schüler ein Divisionsexempel auf. Der Schüler erhielt als Ergebnis 57, Rest 52. Er machte die Probe, indem er den Divisor mit dem Quotienten multiplizierte und den Rest addierte. Er erhielt 17380. Das stimmte nicht. Der Schüler hatte nämlich bei der Multiplikation in dem Divisor an der zweiten Stelle rechts eine Sechs als eine Null gelesen. Wie hießen Divisor und Dividend?

52. Ein Lehrer gab zwei Schülern die Aufgabe, zwei Zahlen zu multiplizieren. Dann ließ er als Probe das Produkt durch den kleineren Faktor dividieren. Das stimmte bei keinem. Der erste erhielt 575, Rest 227; der zweite 572, Rest 308. Jeder hatte nämlich beim Multiplizieren eine 1 zu addieren vergessen, aber jeder an einer anderen Stelle. So hatte der erste im Produkt 100, der zweite 1000 zu wenig erhalten. Wie hießen die zu multiplizierenden Zahlen?

Aufgaben aus der Geometrie.

53. In einem Kreise mit dem Durchmesser d liegt ein Punkt P von dem Mittelpunkt um p entfernt. Wie groß ist seine größte und seine kleinste Entfernung von der Peripherie?

54. Die Peripherien zweier konzentrischer Kreise haben zu ihrer größten Entfernung a, zu ihrer kleinsten Entfernung b. Wie groß sind die Radien der Kreise?

55. Eine Strecke a ist so in drei Teile zu zerlegen, daß sich die Teile wie $1:2:3$ verhalten. Wie lang sind die Teile?

56. Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn die Summen je zweier 38 cm, 46 cm, 42 cm sind?

57. In einem Dreieck verhalten sich die Winkel wie $a:b:c$. Wie groß sind sie?

58. In einem Dreieck ist ein Winkel α gegeben und die Differenz δ der beiden anderen. Wie groß sind die beiden anderen Winkel?

59. Addiert man zu einem Außenwinkel eines Dreiecks den einen nicht anliegenden Innenwinkel, so erhält man 115^0; addiert man den anderen nicht anliegenden

Innenwinkel, so erhält man 125°. Wie groß sind die Innenwinkel, wie groß ist der Außenwinkel?

60. Man verändert ein rechtwinkliges Dreieck unter Beibehaltung der Hypotenuse erstens so, daß die eine Kathete 3 cm länger wird, zweitens so, daß die eine Kathete 8,5 cm kürzer wird. Die andere Kathete wird im ersten Falle 2 cm kürzer, im zweiten Falle 3,5 cm länger. Wie lang waren die Katheten ursprünglich?

61. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks beträgt 28 cm, die Projektionen dieser Seiten auf die dritte Seite sind 9 cm und 5 cm lang. Wie groß sind die Dreiecksseiten?

62. Eine Seite eines Dreiecks wird durch die Höhe in Abschnitte von 30 cm und 9 cm geteilt. Die Summe der beiden anderen Seiten beträgt 91 cm. Wie lang sind diese?

63. Die Differenz zweier Dreiecksseiten beträgt 15 cm, die Projektionen dieser beiden Seiten auf die dritte sind 32 cm und 7 cm groß. Wie lang sind jene Seiten?

64. Wie lang sind zwei Dreiecksseiten, deren Projektionen auf die dritte Seite Längen von 20 cm und 8 cm haben, wenn sie sich selbst um 8 cm in der Länge unterscheiden?

65. Zwei Seiten eines Dreiecks haben Längen von 13 cm und 11 cm. Wie groß sind ihre Projektionen auf die dritte Seite, wenn diese selbst 12 cm lang ist?

66. Je drei Seiten eines Vierecks geben der Reihe nach eine Länge von 130 m, 135 m, 147 m und 152 m. Wie lang ist jede Seite?

Bewegungsaufgaben.

67. Ein Schnelldampfer fährt die 185 km lange Strecke von Köln bis Mainz „zu Berg" in 13 Stunden und 40 Minuten und von Mainz bis Köln „zu Tal" in 8 Stunden 30 Minuten. Wieviel km legt das Schiff, wieviel der Strom in einer Stunde zurück?

68. Der mit dem Winde gehende Schall einer Kanone hat eine Geschwindigkeit von 344 m pro Sekunde, der gegen den Wind gehende Schall eine solche von 325 m pro Sekunde. Wie groß sind die Geschwindigkeiten des Schalles und des Windes?

69. a) Ein Luftschiff fährt mit dem Winde in einer Stunde 97,200 km, gegen den Wind 43,200 km. Wie stark ist der Wind, wie groß die Geschwindigkeit des Luftschiffes — beides ausgedrückt in m pro Sekunde? **b)** Ein Luftschiff fährt von A nach B gegen den Wind und sofort mit dem Wind nach A zurück, es erfährt also auf der Hinfahrt eine Verzögerung, auf der Rückfahrt eine Beschleunigung. Untersuche an der Hand von Beispielen und mit allgemeinen Zahlen, ob Beschleunigung und Verzögerung durch den Wind sich gerade aufheben oder nicht.

70. Erde und Venus nähern sich auf ihrer Bahn bis auf 41 400 000 km und entfernen sich bis 257 600 000 km. Wie groß sind die Abstände der Erde und der Venus von der Sonne, wenn angenommen wird, daß die Bahnen beider Planeten um die Sonne Kreise sind?

71. Auf der Peripherie eines Kreises, welche 100 m lang ist, bewegen sich zwei Körper, die alle 20 Sekunden zusammentreffen, wenn sie sich in derselben Richtung bewegen, alle 4 Sekunden, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen. Wieviel m legt jeder in der Sekunde zurück?

72. Auf der Peripherie eines Kreises, die 999 m lang ist, bewegen sich zwei Körper in derselben Richtung und treffen alle 37 Sekunden zusammen. Wie groß

ist die Geschwindigkeit eines jeden, wenn die des ersten viermal so groß ist als die des zweiten?

73. Aus zwei Städten, die 30 km voneinander entfernt sind, gehen zwei Freunde einander entgegen. Bricht A 2 Stunden früher auf als B, so treffen sie $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Aufbruch von B zusammen. Bricht B 2 Stunden früher auf, so treffen sie erst 3 Stunden nach dem Aufbruch von A zusammen. Wieviel m legt jeder in einer Stunde zurück?

74. Zwei Körper bewegen sich von zwei Punkten aus aufeinander zu. Sie sind p m voneinander entfernt. Fängt der erste d Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie a Stunden nach dem Abgange des zweiten zusammen. Fängt der zweite d_1 Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie a_1 Stunden nach dem Abgange des ersten zusammen. Wieviel m legt jeder in einer Stunde zurück?

75. Die 60 km lange Strecke zwischen Bingen und Koblenz (oder Rüdesheim und Ehrenbreitstein) kann man auf dem Rheinstrom, auf der linksrheinischen oder schließlich auf der rechtsrheinischen Bahn zurücklegen. Um 10 Uhr passiert ein gewöhnlicher Dampfer das Binger Loch, um 10 Uhr 12 Minuten folgt ihm ein Schnelldampfer; beide begegnen gleichzeitig um 11 Uhr 12 Minuten einem Personenzug, der von Koblenz in der Richtung nach Bingen um 10 Uhr 12 Minuten abgefahren war. Der Schnelldampfer legt in der Stunde 4 km mehr zurück als der gewöhnliche Dampfer. Wie stellen sich die Geschwindigkeiten der beiden Dampfer und des Zuges und zu welcher Zeit kommen die Dampfer in Koblenz, der Zug in Bingen an?

76. Um 11 Uhr geht ein gewöhnlicher Dampfer stromaufwärts von Koblenz ab, um 12 Uhr fährt auf der rechtsrheinischen Bahn von Ehrenbreitstein in der Richtung auf Rüdesheim ein Schnellzug, der den Dampfer um $12\frac{1}{4}$ Uhr überholt und einem ihm entgegenkommenden von Rüdesheim um 11 Uhr 40 Minuten abgegangenen Personenzuge um $12\frac{1}{2}$ Uhr begegnet. Dieser Personenzug begegnet dem Dampfer um $12\frac{3}{4}$ Uhr. Wieviel km legen die Züge und der Dampfer in der Stunde zurück und wann erreichen sie ihre Bestimmungsorte?

77. Ein Personenzug geht auf der linksrheinischen Bahn um dieselbe Zeit von Koblenz ab, wo ein Schnellzug auf der rechtsrheinischen Bahn Ehrenbreitstein verläßt. Der erstere kommt in Bingen eine halbe Stunde früher an als in Ehrenbreitstein ein Schnellzug, der in Rüdesheim um dieselbe Zeit abfährt, wo der erstgenannte Schnellzug in Rüdesheim ankommt. Ein stromauffahrender Schnelldampfer, der von Koblenz $1\frac{1}{2}$ Stunden früher abgefahren ist, als die beiden erstgenannten Züge, wird von diesen 30 km und 36 km oberhalb Koblenz überholt. Wieviel km legen dieser Dampfer, der Personenzug der linksrheinischen und der Schnellzug der rechtsrheinischen Bahn in der Stunde zurück?

Aufgaben in der Physik.[1]

Spezifisches Gewicht.

78. Messing besteht aus Kupfer und Zink. Wieviel Kupfer und wieviel Zink ist in einer Komposition von 124 kg, wenn 89 kg Kupfer im Wasser 10 kg, 7 kg Zink

1) In diesen Aufgaben werden die benutzten physikalischen Tatsachen vorausgesetzt. Die Mehrzahl der Aufgaben dieses Abschnittes ist etwas schwieriger; sie eignen sich also besonders zur Wiederholung.

im Wasser 1 kg, und die 124 kg Messing im Wasser 15 kg von ihrem Gewicht verlieren?[1])

79. Eine Komposition von Blei und Zink, die 149 kg wiegt, verliert im Wasser 18 kg. Wieviel kg von jedem Metall sind darin, wenn $11\frac{1}{3}$ kg Blei im Wasser 1 kg, $6\frac{3}{4}$ kg Zink im Wasser ebenfalls 1 kg verlieren?

80. Eine Komposition von zwei Metallen verliert im Wasser p kg. Wieviel kg sind von jedem Metall darin, wenn a kg des ersten im Wasser m kg, b kg des zweiten im Wasser n kg verlieren und die ganze Masse q kg wiegt?

81. Ein Stein, dessen spezifisches Gewicht 3 ist, ist mit einem Stück Korkholz verbunden, dessen spezifisches Gewicht 0,24 ist. Wie schwer ist der Stein, und wie schwer muß das Stück Korkholz sein, wenn das Ganze 115 kg wiegt und gerade so schwer wie Wasser ist, d. h. im Wasser weder aufsteigt noch untersinkt?

82. Ein junger Mann hat sich, um leichter schwimmen zu können, einen Korkgürtel gemacht. Er wiegt mit demselben 71 kg und ist im Wasser gerade so schwer, daß er den 8 kg wiegenden obersten Teil seines Körpers außerhalb des Wassers haben kann, sonst aber vom Wasser weder höher gehoben wird, als nötig ist, noch in demselben untersinkt, die Arme und Füße also nur zu seiner Fortbewegung verwenden kann. Wieviel wog er, und wieviel der Korkgürtel, wenn 40 kg seines unter Wasser getauchten Körpers nur 1 kg wogen und das spezifische Gewicht des Korkholzes 0,24 ist?

83. Ein fichtenes Brett mit kupfernen Beschlägen wiegt 4200 g. Beim Eintauchen bleiben 100 g Holz und 236 g Kupfer außer Wasser. Wie verteilt sich das Gesamtgewicht auf das Holz und das Kupfer, wenn die spezifischen Gewichte dieser beiden Stoffe zu 0,5 und 8,9 angenommen werden?

84. Ein buchenes Brett mit eisernen Beschlägen taucht derart im Wasser ein, daß im ganzen 300 g außerhalb des Wassers bleiben. Wenn das Holz des Brettes 2600 g, die Beschläge 1600 g wiegen, während die spezifischen Gewichte beider Stoffe zu 0,6 und 7,5 angenommen werden, wie verteilt sich das Gewicht des herausragenden Teils auf Holz und Eisen?

Hebel; Arbeit.

85. An einem zweiarmigen Hebel hängen zwei Gewichte. Die Hebelarme verhalten sich wie 4 : 7. Beide Gewichte zusammen sind 16,5 kg schwer. Wie schwer ist jedes von ihnen?

86. Drei Arbeiter A, B und C haben eine Arbeit auszuführen. A und B werden zusammen in 12 Tagen, B und C in 20 Tagen, A und C in 15 Tagen fertig. Wieviel Zeit würde jeder einzelne zur Fertigstellung der Arbeit gebrauchen, wieviel alle drei bei gleichzeitiger Arbeit?

Wärme.

87. Die spezifische Wärme des Eisens kann zu $\frac{1}{9}$, die des Terpentinspiritus zu $\frac{4}{9}$ angenommen werden. Gießt man auf 44 g Eisenfeilspäne von einer gewissen Temperatur 14 g Terpentinspiritus, so ergibt sich eine Ausgleichstemperatur von

1) Die Rechnung wird in diesem Fall und in den folgenden nicht ganz mit der Wirklichkeit stimmen, da beim Zusammenschmelzen immer eine Veränderung in der Dichtigkeit der Metalle eintritt und durch den Schmelzprozeß immer ein Teil des Metalles verloren geht.

39 Grad. Bringt man 32 g Eisenspäne mit 17 g Terpentinspiritus von denselben Temperaturen zusammen, so stellt sich die Ausgleichstemperatur auf 42 Grad. Welche Temperatur hatte hierbei das Eisen und der Terpentinspiritus?

88. Auf eine gewisse Menge Holzkohle von der spezifischen Wärme 0,24 und der Temperatur 20° wird Terpentinspiritus von der spezifischen Wärme 0,45 und 30° Temperatur gegossen, die Ausgleichstemperatur stellt sich auf 26 Grad. Beide Stoffe hatten zusammen ein Gewicht von 90 g. Wie verteilte sich dies auf beide?

Elektrizitätslehre.

89. Ein galvanischer Strom sinkt durch Einschaltung von 3 Ohm Widerstand auf 1,4 Amp., durch Einschaltung von 5 Ohm auf 1 Amp. Wie groß ist die elektromotorische Kraft und der ursprüngliche Gesamtwiderstand?

90. Dadurch, daß man die Zahl der Elemente einer galvanischen Batterie von 3 auf 5 vermehrt, steigt die Stromstärke von 1,5 auf 1,8 Amp., während gleichzeitig der Gesamtwiderstand um 1,4 Ohm zunimmt. Wie groß ist die elektromotorische Kraft eines einzelnen Elements, und wie groß war der ursprüngliche Gesamtwiderstand?

91. Ein Strom i verzweigt sich in zwei Leiter, deren Widerstände w_1 und w_2 sind. Wie groß sind die Teilströme?

92. Ein Strom von 3 Amp. verzweigt sich in zwei Kupferdrähte, deren einer bei 2 mm Stärke eine Länge von 1 m besitzt, während der andere 2 m lang und 1 mm stark ist. Wie groß stellt sich die Stromstärke in den einzelnen Zweigen?

Aufgaben aus alter Zeit.[1])

Aus den griechischen Epigrammen, gesammelt von Maximus Planudes (um 1350):

93. Esel und Maultier schritten einher beladen mit Säcken.
Unter dem Drucke der Last schwer stöhnt' und seufzte der Esel
Jenes bemerkt es und sprach zu dem kummerbeladnen Gefährten:
„Alterchen, sprich, was weinst Du und jammerst schier wie ein Mägdlein?
Doppelt soviel als Du grad' trüg' ich, gäbst Du ein Maß mir;
Nähmst Du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe."
Geometer, Du Kundiger, sprich, wieviel sie getragen.

Nach Vitruv, in dessen 10 Büchern über Architektur (14 v. Chr.?):

94. Die Krone des Königs Hiero von Syrakus war 20 Pfund schwer und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund. Wieviel Gold und wieviel Silber mußte sie enthalten, falls sie bloß aus Gold und Silber bestand, wenn $19\frac{1}{4}$ Pfund Gold im Wasser 1 Pfund, $10\frac{1}{2}$ Pfund Silber ebenfalls 1 Pfund verlieren?

Aus einer deutschen Algebra des 15. Jahrhunderts:

95. Mach aus 10 zwai tail, vnd das gröst tail in das ander tail, vnd das aus der tailung 5 chumbt: wie uil ist ittlichs tails gewesen?

96. Item es sein 3 gesellen, dy haben gelt, vnd der erst spricht zu den andern 2: het ich 7 fl ewres gelts, so het ich dann 3 mol mer dann ir 2;

1) Einige der folgenden Aufgaben lassen sich auch sehr einfach als Gleichungen ersten Grades lösen. Welche?

spricht der ander: het ich 9 fl ewres gelts, so het ich 4mol mer dann ir 2: spricht der dritt: het ich 11 fl ewres gelts, so het ich 5mol mer dann ir 2.

Von Adam Riese (1524):

97. Item eyner spricht zu dem andernn gib mir 1 pfennig, so hab ich souil sam Dir pleibet, spricht der ander zum erstenn gib mir 1 pfennig; so hab ich zwey mal souil sam dir pleibet. Nun wolt ich gern wissen, wiuil eynn etzlicher gehabt hab.

98. Item drey kauffenn 1 pfertt vmb 12 fl. keyner vermugens allein Zubezalen. A spricht zu B und C, leyhe mir itzlicher $\frac{1}{2}$ seynes geldes, so wil ich das pferdt bezalen. Spricht b zum c vnd a gebt mir $\frac{1}{3}$ so wil ich das pferdt vergnugen. Nachdem spricht c zum b vnd a gebt mir beyde $\frac{1}{4}$, so wil ich das pferdt kaufenn. Nun frage ich, wiuil itzlicher in sunderheit gehabt hab.

Aus der Coß von Christoff Rudolff (1525):

99. Es syn dzween Becher vnd ein vberlid (= Deckel). Legt man das vberlid auff den ersten becher so wigt er mit dem vberlid 3mal so schwer als der ander. Legt mans aber auff den andern | so wigt der ander mit dem vberlid 4mal so vil als der erst. Ist die frag wie schwer yeder Becher sey.

100. Vier gselln haben ein pferdt kaufft für 11 fl. begert yeder zu dem das er vorhin hat von seynen dreyen gesellen. Nemlich der erst $\frac{1}{2}$ yhres gelts, der ander $\frac{2}{3}$, der dritt $\frac{3}{4}$, der vierde $\frac{4}{5}$, so hab yeder das pferdt zu bezalen. wie vil hat yeder gehabt? [Der vierde hat 0—1 fl. das ist er hat gar kein gelt, ist noch dazu dem der das pferdt verkaufft 1 fl. schuldig drumb so der andern einer nur 11 fl. bedarff das Pferd zu bezalen, muß der vierde 12 fl. haben.]

Aus: Kunst vnd ordentliche Anweisung inn die Arithmetic ... durch Antonium Newdörffern (1616):

101. Item die Historien melden | daß in dem zehnjährigen Trojanischen Kriege | wegen der einig geraubten schönen Helena | 1566000 vmbkommen | doch auff der Griechen seyten 194000 mehr. Frag ich | wie viel auff jeder seyten insonderheit?

102. Marie ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anna war, als Marie so alt war, wie Anna jetzt ist. Wie alt ist Anna?

Sechstes Kapitel.

Tabellen und graphische Darstellungen.

§ 21. Tabellen und geometrische Veranschaulichung.

Mittelwerte.[1])

1. Die viermalige Messung einer Strecke ergab folgende Werte: 65,13 m; 65,08 m; 65,21 m; 65,16 m. **a)** Welches ist der Mittelwert? **b)** Welches sind die Abweichungen der einzelnen Werte vom Mittelwert?

2. Fünf Beobachter haben eine Strecke mit dem Lineal zu 133,7 cm; 133,6 cm; 133,9 cm; 133,8 cm; 133,5 cm gemessen. **a)** Welches ist der Mittelwert? **b)** Welches sind die Abweichungen der einzelnen Messungen vom Mittelwert?

3. Für die Breite eines Ortes ergaben die Berechnungen auf Grund von fünf verschiedenen Beobachtungen: 51°35′12″; 51°34′56″; 51°43′49″; 51°35′31″; 51°35′15″. **a)** Welches ist der Mittelwert? **b)** Welches sind die Abweichungen der einzelnen Messungen vom Mittelwert?

4. Bei einer Berechnung der Zahl π auf 707 Stellen ergibt sich, daß die einzelnen Ziffern sehr verschieden oft in dem Dezimalbruch auftreten. Es erscheint 74mal die Ziffer 0, 78mal 1, 74mal 2, 72mal 3, 71mal 4, 64mal 5, 70mal 6, 53mal 7, 72mal 8, 79mal 9. Wie oft sollte man eigentlich jede Ziffer erwarten? Welche Abweichungen vom Mittel sind vorhanden?

5. In der Untertertia einer Oberrealschule wurde über das Alter der Schüler folgende Tabelle aufgestellt[2]):

12 Jahr	6	Monat	1	Schüler	13 Jahr	5	Monat	1	Schüler
	7	„	1	„		6	„	3	„
	8	„	0	„		7	„	2	„
	9	„	0	„		8	„	0	„
	10	„	1	„		9	„	1	„
	11	„	0	„		10	„	3	„
13 Jahr	0	„	0	„		11	„	4	„
	1	„	0	„	14 Jahr	0	„	2	„
	2	„	0	„		1	„	2	„
	3	„	1	„		2	„	3	„
	4	„	1	„		3	„	0	„

1) Mittelwerte kann man in der Weise berechnen, daß man die Einzelwerte addiert und die Summe durch die Zahl der Einzelwerte dividiert — vorausgesetzt, daß alle Werte gleichwertig sind. Man kann aber auch schneller unter Verwendung eines vorläufigen Mittelwertes zum Ziel kommen. So zu verfahren ist immer praktisch bei der Durchführung der Rechnung bei längeren Tabellen.

2) In dieser Tabelle sind auch diejenigen Altersangaben ausdrücklich aufgeführt, die für keinen Schüler der Klasse zutreffen. Die Tabelle könnte also kürzer sein. Es ist aber bei derartigen Tabellen praktisch, wenn man die Intervalle regelmäßig, hier von Monat zu Monat, fortschreiten läßt.

14 Jahr 4 Monat	1 Schüler		15 Jahr 3 Monat	1 Schüler	
5 „	0 „		4 „	2 „	
6 „	0 „		5 „	0 „	
7 „	0 „		6 „	0 „	
8 „	1 „		7 „	0 „	
9 „	0 „		8 „	0 „	
10 „	0 „		9 „	0 „	
11 „	0 „		10 „	0 „	
15 Jahr 0 „	3 „		11 „	0 „	
1 „	2 „		16 Jahr 0 „	1 „	
2 „	1 „				

Berechne **a)** das Durchschnittsalter der Klasse, **b)** stelle die Altersverteilung in der Weise dar, daß auf einer Wagerechten das Alter (1 Monat = 2 mm), von 12 Jahr 6 Monat beginnend, senkrecht dazu die Zahl der Schüler, die dieses Alter haben, aufgetragen wird. **c)** Trage in diese Darstellung das Durchschnittsalter, das häufigste Alter und die Mitte zwischen den äußersten Werten ein. **d)** Wie würden sich die Ergebnisse von a und c ändern, wenn der 16jährige Schüler aus der Klasse ausscheidet?

6. An einem Gymnasium waren in den Jahren 1893 bis 1902 jeweils am 1. Februar folgende Klassendurchschnittsalter berechnet worden:

Jahr	O I	U I	O II	U II	O III	U III	IV	V	VI
1893	19,2	18,2	17,0	16,4	15,1	14,3	13,0	11,7	10,6
1894	19,3	18,2	16,8	16,2	15,8	14,0	12,9	11,6	10,6
1895	19,1	18,2	17,0	17,0	15,1	14,0	12,9	11,7	11,0
1896	19,3	18,1	17,0	16,0	14,7	13,6	12,9	11,6	10,2
1897	19,3	18,5	17,2	16,3	15,1	13,9	13,1	11,6	10,6
1898	19,7	18,0	17,5	16,3	14,9	14,3	12,7	11,7	10,3
1899	18,9	18,0	17,3	16,2	15,8	13,8	12,4	11,5	10,3
1900	19,0	18,1	17,5	16,4	15,0	13,8	12,8	11,6	10,5
1901	19,0	17,7	17,5	16,2	15,0	14,4	12,5	11,4	10,3
1902	19,5	17,9	17,5	16,2	15,5	13,8	12,9	11,4	10,5

a)—i) Stelle für jede Klasse das 10jährige Durchschnittsalter fest — eine Stelle nach dem Komma. **k)—t)** Stelle für die einzelnen Jahre das in der Tabelle angegebene Durchschnittsalter der einzelnen Klassen durch Strecken dar.

Veranschaulichung von Größenverhältnissen durch Strecken.

7. Die folgende Tabelle von Gipfelhöhen soll durch vertikale Strecken veranschaulicht werden:

Teutoburger Wald	470 m	Zugspitze	3000 m
Vogelsberg	770 m	Kamerunberg	4000 m
Inselsberg	900 m	Montblanc	4800 m
Brocken	1140 m	Kilimandscharo	6000 m
Feldberg	1500 m	Mt. Everest	8800 m.
Schneekoppe	1600 m		

a) Wähle als Maßstab 100 m = 1 mm, **b)** 100 m = 2 mm. **c)** Stelle die Höhe des Mt. Everest durch eine Strecke von 10 cm dar, wie lang müssen dann die anderen Strecken sein? **d)** Stelle die Höhe des Teutoburger Waldes durch 1 cm dar, wie lang müssen dann die anderen Strecken sein?

8. Die folgende Tabelle gibt die höchsten Punkte einer Anzahl Gebirgsbahnen an. Die Höhen sind in geeignetem Maßstabe durch vertikale Strecken zu veranschaulichen:

Gotthardt (Tunnel)	1154 m
Mont Cenis (Tunnel)	1295 m
Brenner	1367 m
Zermatt-Gornergrat	3018 m
Jungfraubahn (Tunnel)	4075 m
Peruanische Südbahn (Tunnel)	4580 m
Peruanische Zentralbahn (Tunnel)	4770 m.

9. Die durchschnittliche Tiefe der Ozeane wird (nach Krümmel) zu 3440 m angenommen, während die Ostsee nur 66 m, die Nordsee nur 100 m tief ist. Die tiefste bekannte Stelle im Indischen Ozean, südlich von Lombok, ist 6205 m, die tiefste Stelle im Atlantischen Ozean, nördlich von den Antillen, ist 8341 m, die überhaupt tiefste Stelle, die bekannt ist[1]), findet sich im großen Ozean mit 9644 m. Die angegebenen Zahlen sind durch vertikale Strecken in geeignetem Maßstabe zu veranschaulichen (vgl. § 22. Aufg. 47).

10. Anfang 1905 waren in einigen größeren Staaten die Zahlen der Eisenbahnkilometer überhaupt und die Zahlen der auf je 100 qkm des Landes kommenden folgende:

Deutschland	55600 km;	10,3 km	auf	100 qkm
Frankreich	45800 km;	8,5 km	„	100 qkm
England	36300 km;	11,7 km	„	100 qkm
Österreich-Ungarn	39200 km;	5,8 km	„	100 qkm
Rußland	54700 km;	0,9 km	„	100 qkm
Vereinigte Staaten	344200 km;	4,4 km	„	100 qkm.

Mache die Werte **a)** der ersten Spalte, **b)** der zweiten Spalte durch wagerechte Strecken in geeignetem Maßstabe anschaulich.

11. Das Anwachsen des Eisenbahnnetzes in Europa zeigt die folgende Tabelle:

1830	310 km	1860	51860 km	1890	223870 km
1840	2930 km	1870	104914 km	1895	258430 km
1850	23500 km	1880	168980 km	1902	296050 km.
1908	309390 km			1920	370464 km

Stelle diese Zahlen in geeignetem Maßstab durch wagerechte Strecken dar.

---

1) Während die Aufgabensammlung schon im Druck ist, wird bekannt, daß von dem deutschen Vermessungsschiff „Planet" bei den Philippinen eine noch größere Tiefe, 9780 m, gelotet wurde. Berücksichtige auch diesen Wert!

12. Am Weltkabelnetz waren die verschiedenen Staaten (1921) beteiligt mit:

England	283425 km	Japan	14230 km
Vereinigte Staaten	136498 km	Niederlande	10510 km
Frankreich	56757 km	Spanien	5935 km
Deutschland	7099 km	Alle übrigen Staaten	13112 km.
Dänemark	15316 km		

Stelle die Anteile durch Strecken dar.

13. 1908—1911, also in den Jahren des Entstehens des Flugsportes, sind für Flugzeuge folgende Rekordsteigerungen zu verzeichnen gewesen:
a) Höhe: 1908: 100; 1909: 475; 1910: 3100; 1911: 3900 m.
b) Stundengeschwindigkeit: 1908: 65; 1909: 77; 1910: 109; 1911: 133 km.
c) Distanz: 1908: 124; 1909: 232; 1910: 584; 1911: 723 km.
d) Flugdauer: 1908: 2 Std. 20 Min.; 1909: 4 Std. 13 Min.; 1910: 8 Std. 12 Min.; 1911: 11 Std. 1 Min
e) Flugdauer mit Passagier: 1909: 1 Std. 36 Min.; 1910: 4 Std. 5 Min.; 1911: 4 Std. 33 Min.

Stelle diese Größen durch Strecken dar! Welches sind heute die Höchstleistungen?

14. Der Wert des Außenhandels, in Einfuhr und Ausfuhr getrennt, betrug 1905 in Millionen Mark für

	Einfuhr	Ausfuhr
Deutschland	7 500	6 100
Frankreich	3 750	3 800
England	11 500	8 300
Italien	1 700	1 350
Österreich-Ungarn	1 850	1 850
Rußland	1 200	2 200
Vereinigte Staaten	4 700	6 400.

Von dieser Tabelle ist eine graphische Darstellung in der Weise zu geben, daß für jedes Land der gesamte Außenhandel durch eine Strecke in geeignetem Maßstabe darzustellen ist und daß auf diese Strecke Einfuhr und Ausfuhr in zwei Farben aufzutragen sind.

15. Der Bahnhalbmesser der Planeten ist aus der folgenden Tabelle zu entnehmen. Gib **a)** eine geometrische Veranschaulichung der Längen[1]) in zweckmäßigem Maßstab und stelle **b)** nach Augenmaß eine Tabelle der Halbmesser, gemessen in Erdbahnhalbmessern, auf.

Merkur	58 Mill. km	Jupiter	773 Mill. km
Venus	108 Mill. km	Saturn	1418 Mill. km
Erde	149 Mill. km	Uranus	2852 Mill. km
Mars	227 Mill. km	Neptun	4468 Mill. km.

16. Die Stärke des Windes wird bei meteorologischen Beobachtungen nach der sog. Beaufort-Skala gemessen. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Skala und die zugehörigen Windgeschwindigkeiten.

---

1) Achte auf die Lücke, die von den Planetoiden ausgefüllt wird.

	Beaufort	Geschwindigkeit
Schwacher Wind	2	3,1 m pro Sek.
Mäßiger Wind	4	6,7 m „ „
Starker Wind	6	10,7 m „ „
Steifer Wind	7	12,9 m „ „
Sturm	9	18 m „ „
Orkan	12	40—50(?) m „ „

Stelle diese Geschwindigkeiten durch Strecken dar.

17. In Deutschland betrugen vor dem Kriege die jährlichen Aufwendungen für

Kakao und Schokolade	95 Mill. ℳ	Käse	350 Mill. ℳ
Zucker	250 „ „	Milch	1000 „ „
Eier	330 „ „	Alkoholische Getränke	3300 „ „

Gib eine vergleichende Darstellung dieser Größen durch Strecken.

18. Für die verschiedenen Brennstoffe ist in der folgenden Tabelle unter I der Prozentgehalt an Kohlenstoff, unter II der Prozentgehalt an Asche, unter III der Prozentgehalt an Wasser, unter IV der Heizwert in Kilogrammkalorien angegeben (nach J. E. Mayer):

Brennstoffe	I	II	III	IV
Holz (trocken)	42,50	0,85	15,00	3700
Torf	46,00	5,70	14,00	3950
Braunkohle	40,00	8,50	36,00	3720
Fettkohle	82,00	5,00	1,50	7750
Magerkohle	85,50	4,20	0,80	8000
Anthrazit	93,00	1,00	—	8300
Holzkohle	94,00	2,00	—	7790
Koks	86,00	7,00	3,5	7040

Veranschauliche **a)** die Größen I, II und III durch aneinandergefügte Strecken in verschiedenen Farben, **b)** die Größen IV durch Strecken. **c)** Welche der vier Größenreihen entsprechen einander am meisten?

19. Im folgenden ist (nach dem „Gesundheitsbüchlein" des Reichsgesundheitsamtes) eine Tabelle der mittleren Nährwerte einiger Nahrungsmittel gegeben — der Rest ist überall Wasser. a) Veranschauliche die Tabelle dadurch, daß du auf je 10 cm lange Strecken für jedes Nahrungsmittel hintereinander in verschiedenen Farben den Eiweißgehalt usf. aufträgst. b) Jemand verzehrt an einem Tage: 600 g Roggenbrot, 500 g Magermilch, 400 g Kartoffeln, 150 g mittelfettes Rindfleisch, 150 g Erbsen, 40 g Reis, 35 g Schmalz und 20 g Magerkäse. Wieviel g Eiweiß, Fett und Kohlenhydrate hat er zu sich genommen? Gib davon eine Streckendarstellung.

	Eiweiß	Fett	Kohlenhydrate	Holzfaser	Asche
Rindfleisch (mittelfett)	21,0%	5,5%	—	—	1,0%
Kalbfleisch (mager)	20,0	1,5	—	—	2,0
Schweinefleisch (mager)	20,5	7,0	—	—	1,0

	Eiweiß	Fett	Kohlenhydrate	Holzfaser	Asche
Schellfisch	17,0%	0,5%	—	—	1,5%
Kuhmilch (Magermilch)	3,1	0,7	4,8%	—	0,7
Schweineschmalz	0,5	99,0	—	—	—
Magerkäse	34,0	11,5	3,5	—	5,0
Erbsen	23,0	2,0	52,5	5,5%	2,5
Reis	6,5	1,0	78,5	0,5	1,0
Roggenmehl	11,5	2,0	69,5	1,5	1,5
Kartoffeln	2,0	0,2	20,7	1,0	1,0
Obst (frisch)	0,5	—	10,0	4,0	0,5

Veranschaulichung von Größenverhältnissen durch Flächen.

20.[1]) Fig. 1 bringt Einfuhr und Ausfuhr der wichtigsten Länder im Jahre 1910 durch Rechtecke zur Anschauung (nach Gruber). Bestimme den der Zeichnung zugrunde gelegten Maßstab.

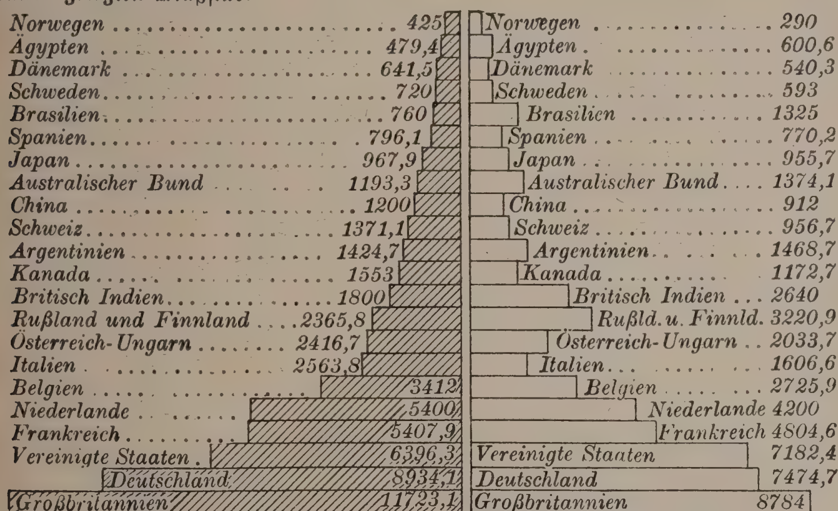


Fig. 1. Links Einfuhr, rechts Ausfuhr in Millionen Mark (nach Gruber).

21. Die Erdteile haben folgende ungefähre Ausdehnung:

Asien	44 Mill. qkm	Afrika	30 Mill. qkm
Amerika	42 " "	Europa	10 " "

Australien 9 Mill. qkm.

Stelle diese Zahlen durch Rechtecke von gleicher Grundlinie und verschiedener Höhe dar. Die Rechtecke sind **a)** nebeneinander, **b)** ineinander zu zeichnen.

22. Die Einfuhr nach Deutschland betrug im Jahre 1910 aus Ländern Europas 5197 Mill. *M*, aus Amerika 2191, aus Asien 828, aus Afrika 418, aus Australien 293 Mill. *M*. Die Ausfuhr nach Ländern Europas 5624, nach Amerika 1855, nach Asien 332, nach Afrika 181, nach Australien 72 Mill. *M* (nach Gruber). Stelle

1) Vergl. auch Aufgabe 14 in diesem Paragraphen.

den Anteil der Erdteile **a)** an der Einfuhr, **b)** an der Ausfuhr durch Rechtecke mit gleichen Grundseiten dar.

23. Auf der Erde stehen Wasserfläche und Landfläche ungefähr im Verhältnis 7 : 3. **a)** Veranschauliche dieses Verhältnis durch Zerlegung eines Kreises in zwei Kreisausschnitte von entsprechender Größe (dabei kann der Winkelmesser benutzt werden). **b)** Die Wasserfläche beträgt ungefähr 350 Mill. qkm. Davon kommen auf den Indischen Ozean 75 Mill. qkm, auf den Atlantischen 90 Mill. qkm, auf den Großen 175 Mill. qkm. Teile den Kreisausschnitt, der die Wasserfläche darstellt, in der Weise, daß die Anteile der drei Ozeane an der gesamten Wasserfläche zum Ausdruck kommen.

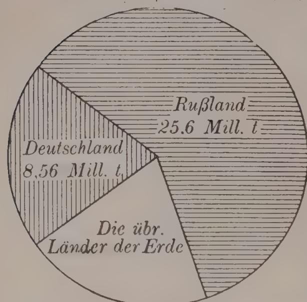


Fig. 2.

24. a) In der Fig. 2 ist der Anteil Rußlands und Deutschlands am Roggenbau der Erde nach einem Lehrbuch der Biologie dargestellt. Auf wieviel ist in dieser Darstellung der gesamte Roggenbau, auf wieviel derjenige der Länder außer Deutschland und Rußland veranschlagt (benutze den Winkelmesser!)? **b)** Fig. 3 veranschaulicht die Verteilung der jetzt bekannten Kohlenfelder auf die verschiedenen Länder der Erde (nach Heusler). **a)** Gib schätzungsweise den ungefähren Anteil Chinas, der Vereinigten Staaten, Kanadas, Großbritanniens an der Gesamtheit der Kohlenfelder an. **b)** Gib schätzungsweise an, wievielmal soviel Kohle wie in Deutschland in Spanien, England, Rußland vorhanden ist.

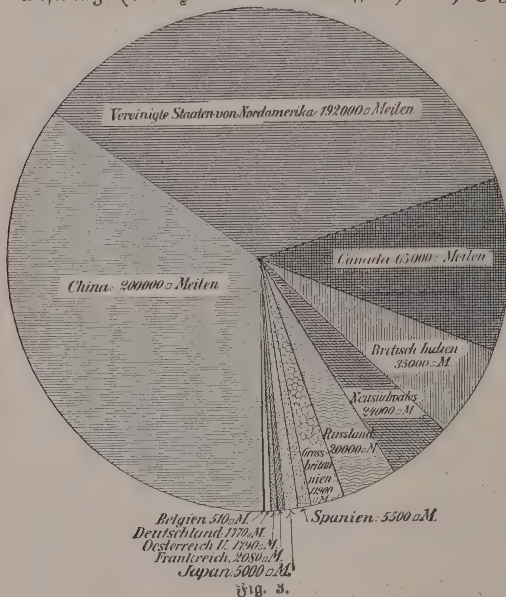


Fig. 3.

25. Fig. 4 veranschaulicht durch Kreisflächen, wieviel Mill. *M* der Import Deutschlands von den wichtigsten Ländern im Jahre 1910 betrug (nach Gruber). Gib unter Benutzung der in die Figuren eingetragenen Zahlen eine Streckendarstellung des Importanteiles der verschiedenen Länder. Welche Darstellung ist vorzuziehen, die durch Kreise oder die durch Strecken? (Grund!)

26. In Fig. 5 ist die Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen in Jena im Jahre 1916 veranschaulicht. Die Pfeilspitzen geben die Richtungen, wohin der Wind weht (nicht, woher er kommt! Ostwind weht nach Westen!), die Länge der Strahlen ihre Häufigkeit. Miß die Strahlenlängen und entwirf eine Tabelle der prozentualen Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen.

Vergleichung von Zeiträumen.

27. Nach dem Kalender ging die Sonne auf und unter:

a) am 21. März 1910 um 6 Uhr 5 vorm. und 6 Uhr 12 nachm.
b) „ 22. Juni 1910 „ 3 „ 39 „ „ 8 „ 24 „
c) „ 22. Dez. 1910 „ 8 „ 11 „ „ 3 „ 45 „

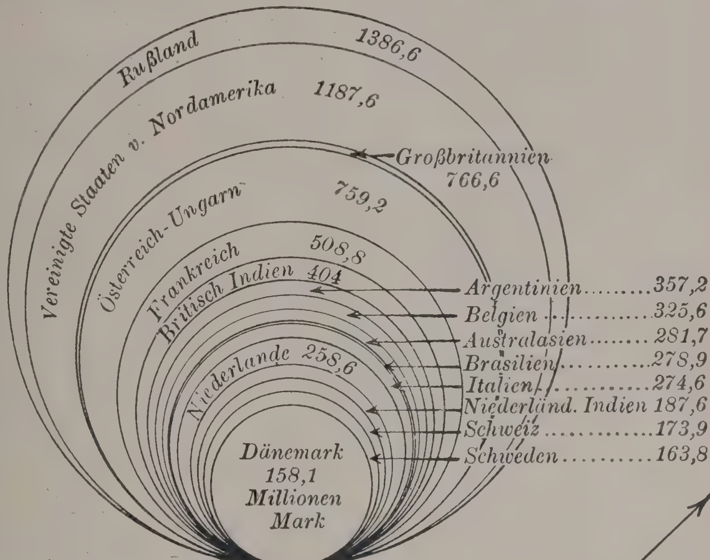


Fig. 4.

Trage in eine Strecke, die dem Zeitraum von 12 Uhr Mitternacht bis wieder 12 Uhr Mitternacht entspricht, die einzelnen Auf- und Untergangszeiten ein und stelle die Tageslängen durch entsprechende Strecken dar.

28. Der in der Fig. 6 abgebildete „Sonnenstreifen" aus Halle a. S. vom 6. November 1911 ist dadurch entstanden, daß die Sonne, solange sie schien, auf eine vorgedruckte Zeitskala einen Strich eingebrannt hat. IX bedeutet 9 Uhr vorm., XII 12 Uhr mittags, III 3 Uhr nachmittags. Gib an, wann an diesem Tage die Sonne von Wolken verdeckt war.

29. In der Fig. 7 ist die Lebenszeit von Lessing, Goethe, Schiller und Heinrich von Kleist durch Strecken veranschaulicht. **a)** Gib nach der Figur die Geburts- und Todesjahre der vier Dichter an. **b)** Stelle nach der Figur eine Zeichnung her und

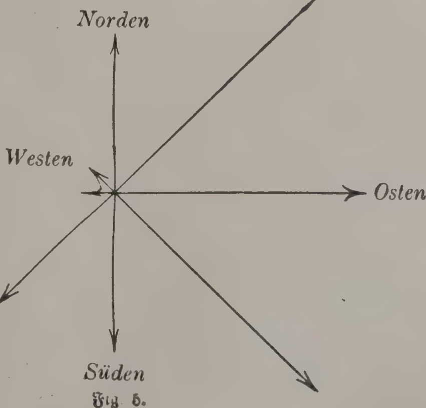


Fig. 5.

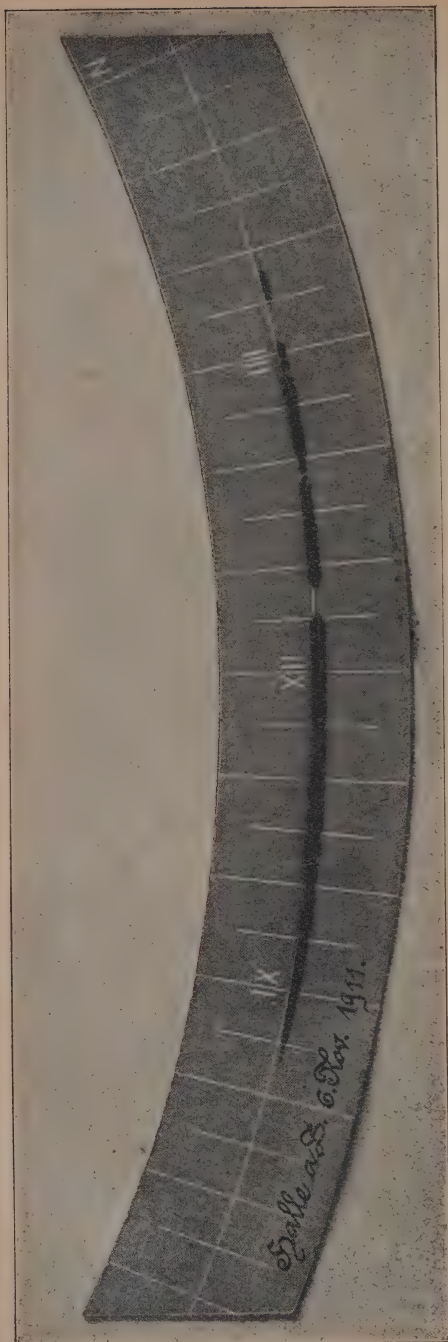


Fig. 6.

trage auch die Lebenszeiten folgender Dichter ein: Klopstock (1724—1803), Wieland (1733—1813), Herder (1744 bis 1803), Körner (1791—1813), Ernst Moritz Arndt (1769—1860), Uhland (1787—1862).

§ 22. Graphische Darstellungen empirischer Funktionen.

Temperaturen.

1. Ein Topf mit Wasser wird durch eine Gasflamme erhitzt. Von Minute zu Minute werden an einem in das Wasser getauchten Thermometer folgende Ablesungen gemacht: 18^0, 23^0, 29^0, 36^0, 42^0, 48^0, 53^0, 59^0, 65^0, 70^0. Stelle das Steigen der Temperatur graphisch dar. (Auf der x-Achse 1 Min. $\equiv$ 1 cm, auf der y-Achse $1^0 \equiv$ 1 mm.) Was läßt sich der Darstellung entnehmen?

2. Ein Topf mit Wasser wird erst durch eine kleine, dann durch eine größere Gasflamme erhitzt. Der Wechsel wird nach 5 Min. vorgenommen. Nach $10\frac{1}{2}$ Min. wird kaltes Wasser zu dem bereits erwärmten gegossen. Die Ablesungen alle halben Min. liefern: 18^0, $19\frac{1}{2}^0$, 21^0, $22\frac{1}{2}^0$, 24^0, $25\frac{1}{2}^0$, 27^0, 28^0, 29^0, $30\frac{1}{2}^0$, $33\frac{1}{2}^0$, $36\frac{1}{2}^0$, 40^0, 43^0, $46\frac{1}{2}^0$, $49\frac{1}{2}^0$, $52\frac{1}{2}^0$, 56^0, $59\frac{1}{2}^0$, 62^0, 58^0, 60^0, 62^0, 64^0, 66^0, 68^0, 70^0, $72\frac{1}{2}^0$, $74\frac{1}{2}^0$, $76\frac{1}{2}^0$, $78\frac{1}{2}^0$, $80\frac{1}{2}^0$, $82\frac{1}{2}^0$, $84\frac{1}{2}^0$, $86\frac{1}{2}^0$. **a)** Stelle den Temperaturverlauf graphisch dar. **b)** Was ergibt sich aus der graphischen Darstellung für die Zunahme der Wärme bei Änderung der Wärmezufuhr und bei Änderung der Wassermenge?

3. Aus verschiedenen Beobachtungen hat man für die Temperaturabnahme mit wachsender Tiefe im äquatorialen Teil des Stillen Ozeans die folgenden Zahlen gefunden (nach Janson):

Tiefe in m:	Temperatur in Celsiusgraden:	Tiefe in m:	Temperatur in Celsiusgraden:
0	28,0	1440	3,0
180	21,7	1620	2,5
360	10,0	1800	2,2
540	7,5	1980	2,0
720	6,2	2160	1,9
900	5,0	2340	1,8
1080	4,2	2520	1,7
1260	3,5	2700	1,6.

Stelle die Temperaturabnahme in geeignetem Maßstabe graphisch dar.

4. An einem Junitage wurden von 2 zu 2 Stunden, von Mitternacht beginnend, in Eberswalde gemessen 1. an der Erdoberfläche im Freien, 2. 15 cm über der Erdoberfläche im Freien, 3. im Walde an der Erdoberfläche (die nach Müttrich gegebenen Werte sind Durchschnittszahlen, die in der zweiten Hälfte des Juni 1879 beobachtet sind):

	1.	2.	3.
12 Uhr Mitternacht	16,7	19,4	15,3
2 „ vorm.	15,6	18,4	14,6
4 „ „	15,1	17,8	14,3
6 „ „	15,9	17,4	14,6
8 „ „	17,5	17,5	16,1
10 „ „	22,6	18,8	18,7
12 „ mittags	25,0	20,5	19,8
2 „ nachm.	26,4	22	20,8
4 „ „	25,9	22,9	20,4
6 „ „	22,4	22,6	19,1
8 „ „	19,7	21,6	17,5
10 „ „	17,8	20,5	16,2

Stelle die drei Temperaturfolgen in einem Koordinatennetz dar und vergleiche sie miteinander.

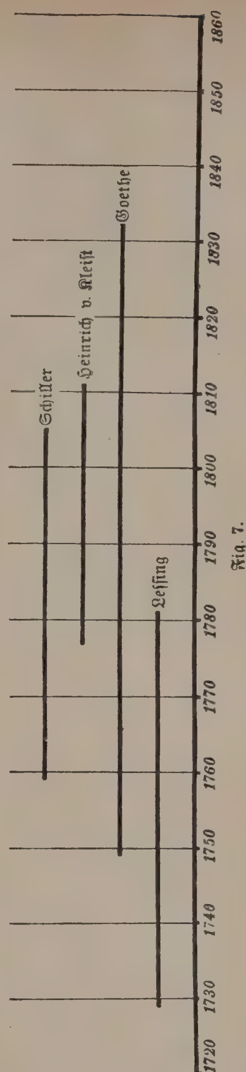


Fig. 7.

5. Von den folgenden monatlichen Durchschnittstemperaturen sind die Werte in der ersten Spalte aus Beobachtungen auf der Gauß-Station auf Kaiser-Wilhelm-Land in der Antarktis 1902/03 gewonnen, die Werte in der zweiten Spalte aus Beobachtungen auf Franz-Josephs-Land in der Arktis 1872/73:

Januar	— 0,9	— 22,6	Juli	— 18,1	+ 1,5
Februar	— 3,1	— 34,9	August	— 21,9	+ 0,3
März	— 8,3	— 32,0	September	— 17,7	— 9,4
April	— 15,6	— 22,1	Oktober	— 12,9	— 16,9
Mai	— 14,1	— 9,2	November	— 6,9	— 25,0
Juni	— 17,7	— 0,7	Dezember	— 1,3	— 30,5.

Stelle die Werte graphisch dar und vergleiche die beiden Temperaturfolgen miteinander. Wo liegen die höchsten und tiefsten Temperaturen? Welche Zeit liegt zwischen den höchsten Stellen der beiden Kurven, welche zwischen den tiefsten?

6. In der folgenden Tabelle sind die monatlichen Durchschnittstemperaturen von 6 Städten Deutschlands verzeichnet, nämlich: 1. Aachen, 2. Berlin, 3. Kiel, 4. Memel, 5. München, 6. Tilsit.

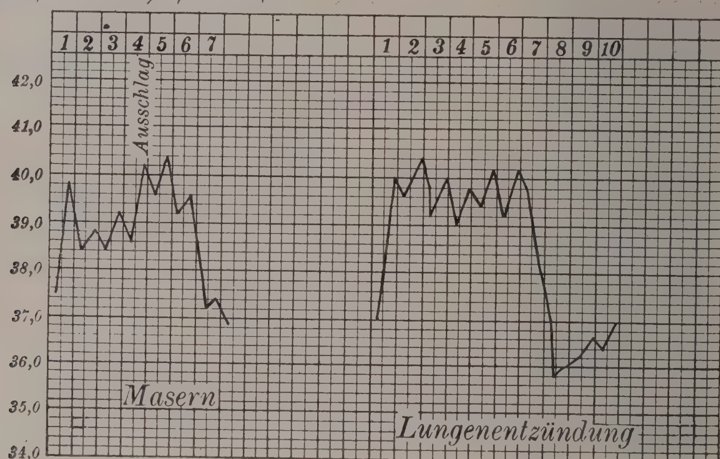


Fig. 8

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Januar	1,9	— 0,7	— 0,7	— 2,6	— 3,0	— 3,8
Februar	3,0	0,3	0,2	— 2,7	— 1,1	— 3,7
März	5,0	2,9	1,7	— 0,6	2,3	— 1
April	9,2	7,4	5,6	4,8	7,4	5,4
Mai	13,0	12,7	10,2	10,0	12,0	11,1
Juni	16,6	16,7	14,6	15,0	15,6	16,1
Juli	17,8	18,1	15,8	17,1	17,2	17,7
August	17,4	17,4	15,1	16,5	16,5	16,5
September	14,7	13,9	12,3	13,1	12,9	12,7
Oktober	10,3	9,0	7,9	7,9	8,0	7,0
November	5,8	3,6	3,9	2,3	3,9	1,1
Dezember	2,8	0,5	0,8	— 1,5	0,8	— 2,9.

a) Stelle den Temperaturgang in Memel dar, berechne das Jahresmittel und trage es als Parallele zur x-Achse in die Darstellung ein. **b)** Gib eine vergleichende Darstellung des Temperaturganges in Aachen und Tilsit und stelle eine Tabelle der Differenzen zwischen den entsprechenden Monatsmitteln auf. **c)** Gib eine vergleichende Darstellung des Temperaturganges in München und Kiel und berechne in jedem der beiden Fälle die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Temperaturwert. **d)** Löse die in c) geforderte Aufgabe für Berlin und Kiel.

Die Fig. 8—11 stellen Fieberkurven dar, wie sie vom Arzt in vorgedruckte Formulare eingetragen werden. Die Temperaturmessungen werden täglich zweimal,

am Vormittag und am Nachmittag, gemacht. Aufeinanderfolgende Messungen sind durch Strecken verbunden worden. Die Zahlen oben geben die Krankheitstage an. Die Gradeinteilung gibt 2 Zehntel an[1]).

7. Nach der Fieberkurve eines Maserkranken (Fig. 8) stelle fest, **a)** um wieviel die Temperatur in der 1., in der 2. usf. bis zur 7. Nacht gefallen ist. **b)** Wann ist die Höchsttemperatur erreicht worden und wie groß war sie?

8. Von der Fieberkurve in einem Falle von Lungenentzündung (Fig. 8) ist **a)** Zeit und Höhe der höchsten und der tiefsten Temperatur anzugeben, **b)** in einer Liste zusammenzustellen, um wieviel die Temperatur an den einzelnen Tagen nachmittags höher als vormittags war. (Vorzeichen beachten!)

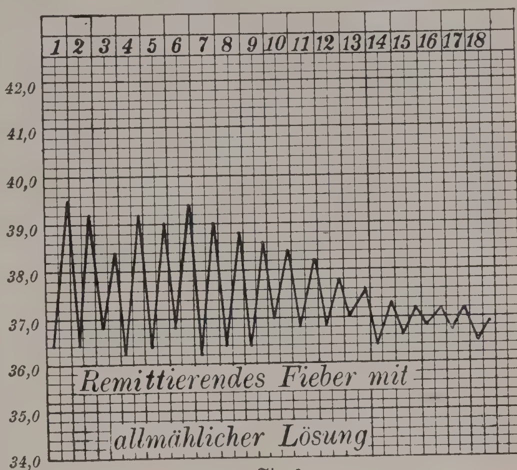


Fig. 9.

9. a) Stelle für den Fall eines remittierenden Fiebers, der in der Fig. 9 wiedergegeben ist, für jeden der 18 Krankheitstage die Temperaturerhöhung erst in einer Tabelle und danach durch Strecken dar. **b)** Berechne die Durchschnittstemperatur für jeden Tag (Mittel aus Vormittags- und Nachmittagsablesung) und stelle sie graphisch dar.

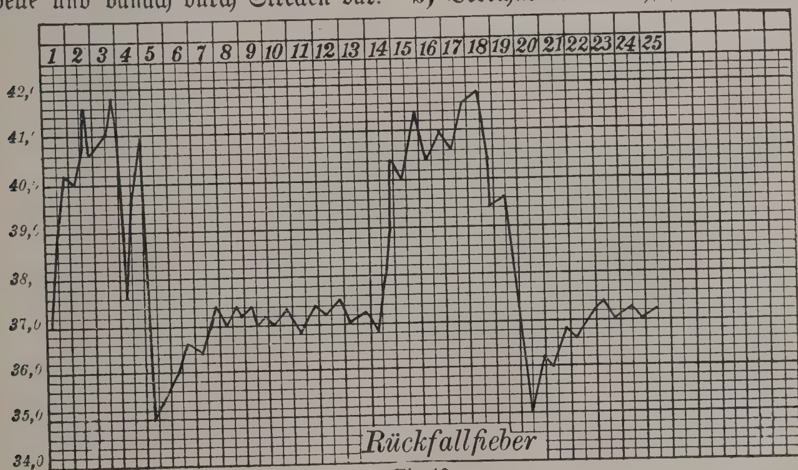


Fig. 10.

10. Gib bei dem in Fig. 10 dargestellten Rückfallfieber **a)** die beiden Maxima und ihren Abstand, **b)** die beiden Minima und ihren Abstand an. **c)** Wie lange

1) Mehrfach sind an einem Tage mehr als 2 Ablesungen gemacht, manchmal auch weniger.

war das Verhalten der Temperatur ungefähr normal? **d)** Gib eine Tabelle der Temperaturabfälle in den einzelnen Nächten.

11. Gib bei dem in Fig. 11 dargestellten Typhusfall an, **a)** wann und bei welchen Temperaturen Fiebermittel gegeben sind und wie groß der sofortige Tempe-

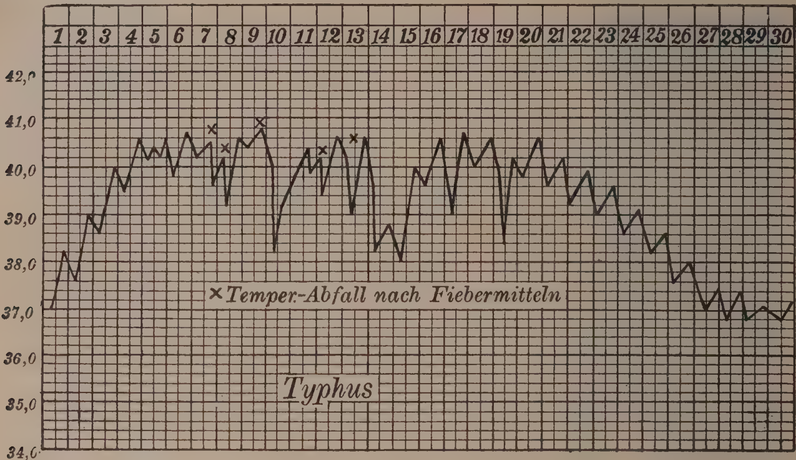


Fig. 11.

raturabfall — wenn er aus der Darstellung ersichtlich ist — jeweilig war. **b)** Gib eine graphische Darstellung der täglichen Durchschnittstemperaturen (Mittel zwischen Vormittags- und Nachmittagsablesung).

12. Die von einem selbstregistrierenden Apparat[1]) in Marggrabowa vom 7. bis 14. Juni 1911 aufgenommene Temperaturkurve (Fig. 13, Tafel I.) ist auf folgende Fragen hin zu untersuchen: **a)** Wann tritt an den einzelnen Tagen die höchste, wann die tiefste Temperatur ein? **b)** Welches waren für jeden Tag die höchsten und die tiefsten Temperaturen? **c)** Gib an, wann plötzliche Temperaturstürze eingetreten sind und um wieviel die Temperatur jeweilig gesunken ist. **d)** Stelle für einen Tag eine Tabelle auf, wie groß die Änderung der Temperatur von 2 Stunden zu 2 Stunden ist, und gib eine graphische Darstellung dieser Änderungen unter Berücksichtigung des Vorzeichens.

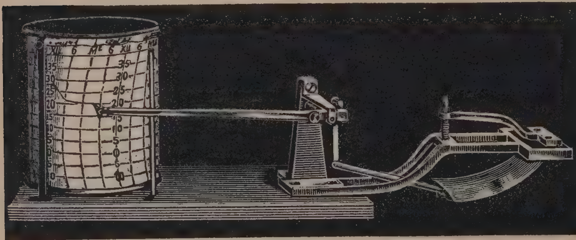


Fig. 12.

---

1) Die Fig. 12 zeigt, wie eine solche Temperaturkurve aufgezeichnet wird. Gib den Grund dafür an, daß an die Stelle der einen Schar von Geraden, die zu denen der anderen senkrecht stehen, hier Kreisbögen getreten sind.

Treppenkurven.

13. Stelle bei den ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 bis 20 die Anzahl der Teiler fest, die Zahl selbst und 1 jedesmal mitgerechnet, und gib eine Darstellung der Teileranzahl durch eine Treppenkurve.

14. Stelle bei den ganzen Zahlen 1, 2, 3 bis 100 die Anzahl der Faktoren, die sich bei der Zerlegung der einzelnen ganzen Zahlen in Primzahlfaktoren ergibt, durch eine Treppenkurve graphisch dar (die Zahl 1 ist nicht als Primzahlfaktor zu zählen).

15. Die Zahl der Abiturienten einer Schule betrug:

Ostern	1900	13	Michaelis	1900	11
„	1901	11	„	1901	8
„	1902	8	„	1902	8
„	1903	17	„	1903	13
„	1904	17	„	1904	9
„	1905	12	„	1905	12
„	1906	9	„	1906	15
„	1907	7	„	1907	16
„	1908	24	„	1908	11
„	1909	11	„	1909	8
„	1910	15	„	1910	16.

a) Gib eine Treppenkurve dieser Zahlen. **b)** Gib die Gesamtzahl der Abiturienten von Ostern 1900 bis Michaelis 1910 an. Wie wird diese Gesamtzahl in der graphischen Darstellung veranschaulicht?

16. Die Anzahl der Schüler in den einzelnen Klassen eines Gymnasiums ist die folgende (die b-Klassen haben Michaelisversetzung).

VI a	35	IV a	35	OIII a	25	OII a	18
VI b	19	IV b	34	OIII b	26	OII b	24
V a	34	UIII a	34	UII a	22	I a	29
V b	22	UIII b	22	UII b	20	I b	28

Stelle **a)** die Schülerzahlen der a-Klassen, **b)** die der b-Klassen, **c)** die aller Klassen durch eine Treppenkurve dar. Gib auf Grund der Darstellungen a) und b) durch Auszählen (möglichst einfaches Verfahren!) die Gesamtschülerzahl **d)** aller a-Klassen, **e)** aller b-Klassen an.

17. Die Anzahlen der Schüler in den einzelnen Klassen einer Oberrealschule **a)** im Westen (erste Spalte) und **b)** einer anderen im Osten (zweite Spalte) sind die folgenden (die Klassen sind mehrfach geteilt):

VI: 97; 119. UIII: 79; 110. OII: 50; 43.
V: 93; 124. OIII: 64; 113. UI: 37; 17.
IV: 76; 123. UII: 52; 85. OI: 16; 17.

Stelle diese Anzahlen durch eine Treppenkurve dar und gib an der Hand des graphischen Bildes eine anschauliche Verdeutlichung der Gesamtschülerzahl für jede der beiden Schulen.

Kurven als Zusammenfassung vieler Einzelbeobachtungen.

18. Ein Kreis von 5 cm Radius ist gegeben. **a)** Er wird von einer Schar paralleler Sehnen geschnitten. Die Länge der Sehnen ist als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt zu bestimmen und graphisch darzustellen, und zwar sind erst die Sehnen zu untersuchen, deren Abstände vom Mittelpunkt 0, 1, 2, ... 5 cm sind, dann die mit den Abständen $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, ... $4\frac{1}{2}$ usf. — Auf einer durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Sekante bewegt sich ein Punkt von der Kreisperipherie immer weiter weg. Von dem Punkt sind Tangenten an den Kreis gelegt und die Berührungssehne ist gezogen. Stelle die Länge **b)** der Tangenten (gemessen von dem beweglichen Punkt bis zu den Berührungspunkten), **c)** der Berührungssehne als Funktion des Abstandes des beweglichen Punktes von der Peripherie graphisch dar. Die Unterlagen zu den graphischen Darstellungen sind durch Zeichnung und Messung zu finden.

19. Fig. 13a stellt die Sterblichkeit der Menschen dar, d. h. die Zahl der von 1000 gleichzeitig geborenen von Jahr zu Jahr noch übrigbleibenden Menschen. Was läßt sich aus der Kurve ablesen?

20. Wasser siedet unter höherem als dem gewöhnlichen Atmospärendruck erst bei höheren Temperaturen und zwar

bei einem Druck von:	bei einer Temperatur von:	bei einem Druck von:	bei einer Temperatur von:
1 Atmosphäre	100°	8 Atmosphären	170,8°
2 Atmosphären	120,6°	9 "	175,8°
3 "	133,9°	10 "	180,3°
4 "	144,0°	20 "	213,0°
5 "	152,2°	30 "	236,2°
6 "	159,2°	40 "	252,5°
7 "	165,3°	50 "	265,9°

Stelle nach dieser Tabelle die Siedetemperatur als Funktion des Druckes dar. Bei der graphischen Darstellung ist es vorteilhaft, als Nullpunkt nicht 0°, sondern 100° zu wählen, also die ganze Kurve um die 100° entsprechende Strecke nach unten zu schieben.

21. Das Volumen eines Grammes Wasser beträgt in Kubikzentimetern bei einer Temperatur von

0°	1,00013	55°	1,01442
4°	1,00000	60°	1,01697
10°	1,00027	65°	1,01971
15°	1,00087	70°	1,02260
20°	1,00177	75°	1,02569
25°	1,00294	80°	1,02890
30°	1,00435	85°	1,03224
35°	1,00598	90°	1,03574
40°	1,00782	95°	1,03938
45°	1,00974	100°	1,04327
50°	1,01201		

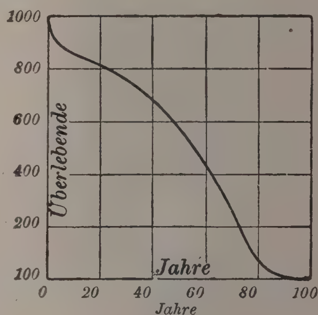


Fig. 13a.

Das Volumen ist als Funktion der Temperatur darzustellen. Dabei ist der Nullpunkt für das Volumen und der Maßstab so zu wählen, daß die Volumenänderungen deutlich zum Ausdruck kommen.

22. Der mittlere Barometerstand, bei der Höhe h über dem Meeresspiegel gemessen, ist:

Höhe in m:	0	100	200	300	400	500	600
Barom. in mm:	760	751	742	733	724	716	707
Höhe in m:	700	800	900	1000	1100	1200	1300
Barom. in mm:	699	690	682	674	666	658	650
Höhe in m:	1400	1500	1600	1700	1800	1900	
Barom. in mm:	642	635	627	620	612	605.	

Stelle den Barometerstand als Funktion der Höhe dar. — Geeigneter Maßstab!

23. Die Deklination — die Abweichung der Magnetnadel von der Nord-Südrichtung — zeigt außer geringen jährlichen und täglichen Schwankungen (vgl. Aufg. 25 und 37) eine säkulare Änderung. In der Fig. 14 (nach F. Auerbach) sind die beobachteten Werte für Paris eingetragen und durch diese Punkte ist eine Kurve gelegt. a) Gib an, welche Beobachtungswerte von der Kurve am stärksten abweichen. b) Pause die Punkte durch und lege selbst einen gebrochenen Linienzug durch sie hindurch.

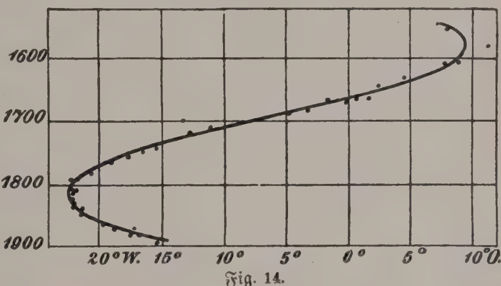


Fig. 14.

Verschiedene Arten von Registrierkurven.

24. Nach dem in Fig. 15 (Tafel I.) wiedergegebenen Barogramm von Neuwied, 18. bis 25. Mai 1908, ist **a)** der höchste und tiefste Barometerstand (Zeit?) anzugeben; **b)** die Barometerschwankungen vom 21. Mai mittags bis zum 22. Mai mittags sind zu beschreiben.

25. Fig. 16 gibt eine Aufnahme der Deklination (vgl. Aufg. 23) in Potsdam wieder. Die Aufnahme reicht vom 4. September 1909 8 Uhr vorm. bis zum 5. September 1909 6 Uhr vorm., die Zeit nach Greenwich gemessen. Mitternacht nach Potsdamer Ortszeit ist durch eine Gerade bezeichnet. Die Aufnahme zeigt kein Liniennetz. Der Maßstab für die Deklinationswinkel ist aber seitlich kenntlich gemacht. Zum Ablesen kann man sich eines Papierlineals bedienen. Fragen: **a)** Welches ist der größte Wert der Abweichung von der Nord-Südrichtung und wann trat er ein? **b)** Wann trat die größte Annäherung der Magnetnadel an die Nord-Südrichtung ein und wie groß war da die Abweichung? **c)** Wie groß war also die Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert? **d)** Beschreibe die zwischen 7 und 9 Uhr abends am 4. September auftretenden Schwankungen.

26. In dem beigegebenen, etwas verkleinerten Seismogramm (Fig. 17) sind die Zeiten dadurch kenntlich gemacht, daß der Kurvenzug für eine kurze Zeit unterbrochen ist. Die zugehörigen Zeiten sind beigeschrieben (die Stunden sind über 12 hinaus bis 24 gezählt). Die einzelnen Linien des Seismogramms sind in der Wiedergabe, der besseren Deutlichkeit halber, weiter voneinander entfernt, als das im Original der Fall ist. Fragen: **a)** Im Original entsprach einer Zeitsekunde eine

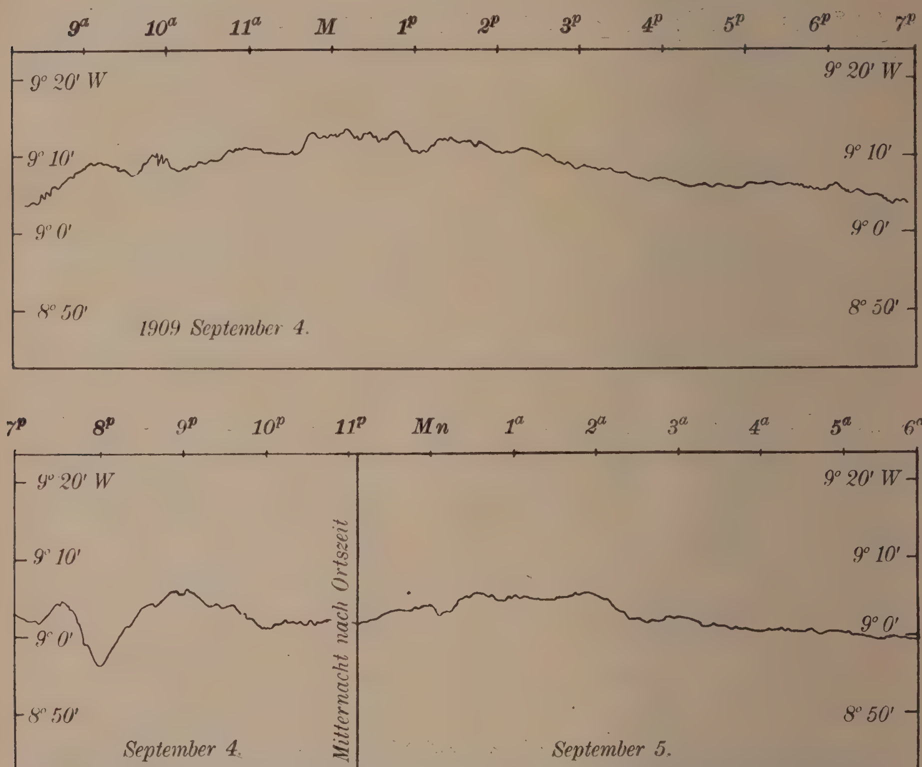


Fig. 16.

Strecke von 0,1 mm. Stelle auf Grund der Zeitmarken fest, welche Strecke in der Wiedergabe einer halben Stunde, einer Minute, einer Sekunde entspricht, in welchem Verhältnis also das Original verkleinert ist. **b)** Im Original war die Vergrößerung (schneller) Schwingungen eine 32fache. Berechne unter Benutzung des Ergebnisses von a), wie groß die Vergrößerung der Schwingungen in der Wiedergabe in diesem Buche ist. **c)** Gib an, wann der erste Vorläufer, der zweite Vorläufer, das Hauptbeben beginnt und wann der größte Ausschlag erfolgte. **d)** Bestimme die Zeit zwischen dem Beginn des Bebens und dem Auftreten der um die Erde gegangenen Wellen.

27. Die Fig. 18 gibt die Entladungskurve eines Zitterwelses (nach Garten). Diese Tiere besitzen elektrische Organe. Deren Entladung ist mit Hilfe eines be-

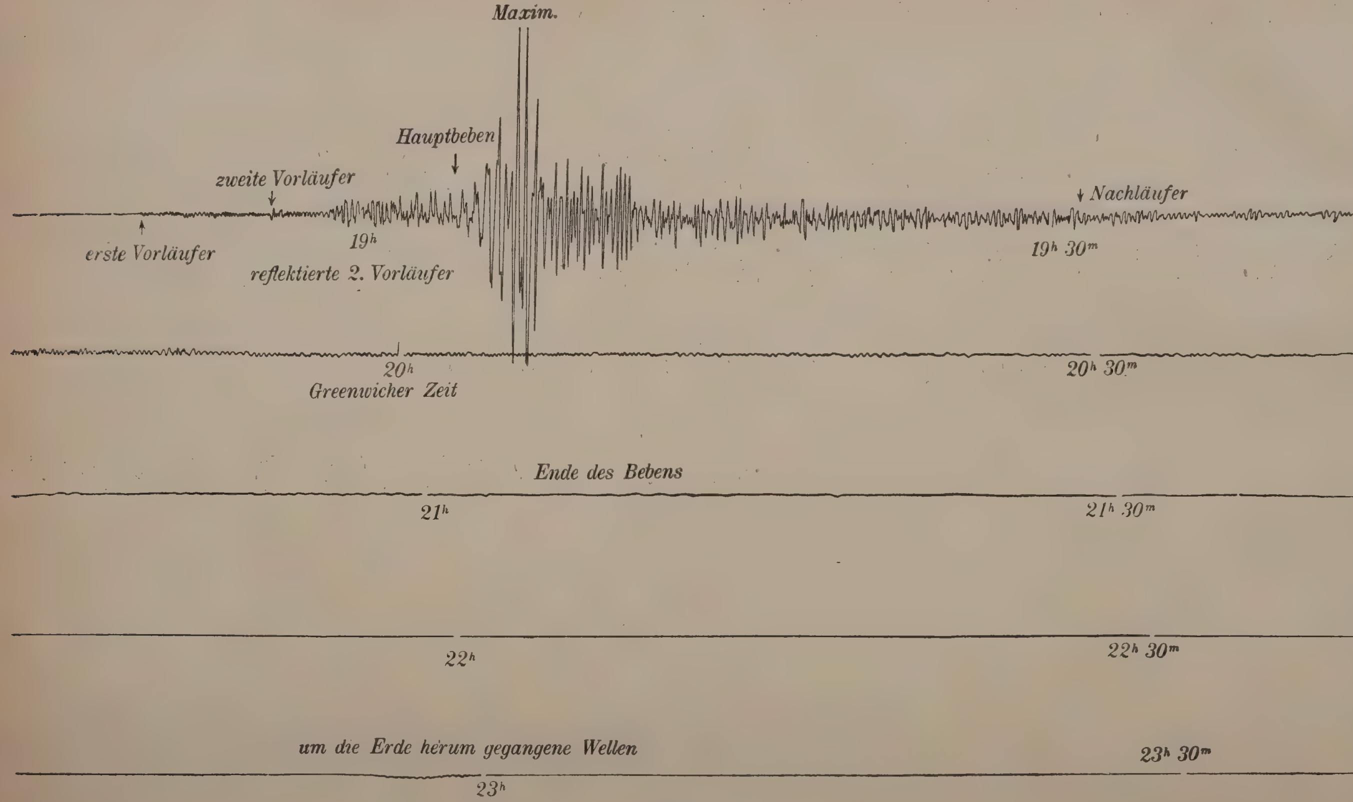


Fig. 17.

Erdbeben in Zentralasien am 18. Februar 1911. Registriert vom Horizontalpendelapparat des Geodätischen Instituts in Potsdam.

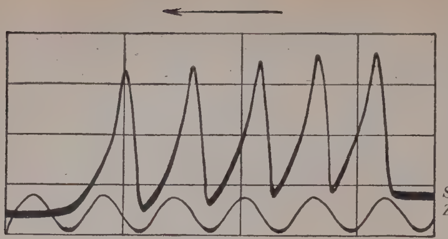


Fig. 18.

sonders dazu geeigneten Galvanometers durch die mit S bezeichnete Kurve dargestellt. Zur Zeitbestimmung dienen die mit Z bezeichneten Aufzeichnungen der Schwingungen einer Zungenpfeife. Eine Schwingung der Zungenpfeife dauert $\frac{1}{148}$ Sekunde. Die Richtung, in der die Zeit gerechnet wird, ist hier von rechts nach links genommen, so wie es der Pfeil angibt. Frage: **a)** Wie lange dauert jeder der 5 Schläge? **b)** In welchem Verhältnis steht die Zeit des Anstieges der Kurve zu der des Abstieges?

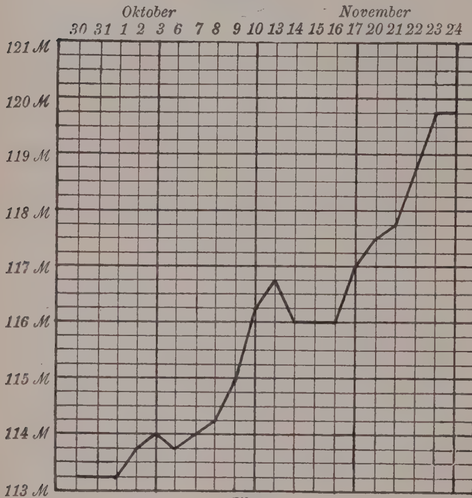


Fig. 19 a.

Änderungen der Kurvengestalt oder des Maßstabes.

28. Dem Handelsteil einer Zeitung sind die graphischen Darstellungen entnommen, die eine „Kupferhausse" veranschaulichen. Fig. 19a stellt für die Zeit vom 30. Oktober bis 24. November 1911, Fig. 19b vom 20. November bis zum 15. Dezember die Preise für 100 kg in ℳ für Januarlieferung dar. Es ist die Darstellung des Preisganges durch eine Treppenkurve verlangt.

29. Der erste Teil des Hauptbebens auf dem Seismogramm der Aufg. 26 (Fig. 17) ist derart umzuzeichnen, daß der Maßstab für die Zeit gegenüber der Fig. 17 verzehnfacht wird.

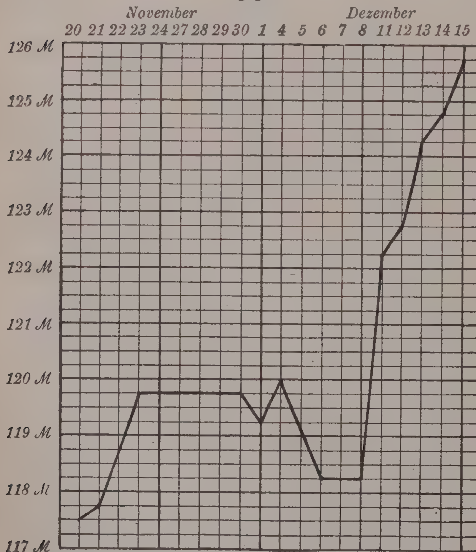


Fig. 19 b.

30. In der graphischen Darstellung Fig. 20 (nach Auerbach) ist der Siedepunkt des Wassers in der unteren Hälfte als Funktion des Luftdruckes, in der oberen Hälfte als Funktion der Meereshöhe dargestellt. **a)** Gib den Siedepunkt in 700 m, 1250 m Höhe an. **b)** Gib den Siedepunkt bei 665 mm, 780 mm, 725 mm an. **c)** Kontrolliere die Richtigkeit der Beziehung von Druck und Meereshöhe an den Angaben von Aufg. 22.

31. Die Fig. 21 (Tafel **I**) gibt die Fahrtkurve eines am 10. Juli abends in Berlin-Schmargendorf aufgestiegenen Freiballons wieder, der am nächsten Tage

morgens bei Dobrzyca-Posen gelandet ist. **a)** Wann ist der Ballon aufgestiegen und wann ist er gelandet? **b)** Wann wurde der höchste Barometerdruck registriert und wie hoch war da der Ballon? **c)** Etwa in der Mitte der Fahrt hat der Ballon seine Höhe mehrfach schnell hintereinander und um beträchtliche Werte geändert; gib für das plötzliche Steigen, das folgende Fallen, das wiederholte Steigen, das Fallen und schließlich den letzten Anstieg jeweilig an, in welcher Zeit 100 m Höhenunterschied überwunden wurde.

32. Fig. 22 zeigt eine Luftdruckregistrierung mit dem Toeplerschen Luftdruckvariographen vom 29. Januar 1903. Als Zeitmarken dienen Lücken. Die auf der Fig. sichtbaren Marken entsprechen 9 Uhr 30 Min. und 11 Uhr. Die Kurve gibt außerordentlich kleine Schwankungen des Luftdruckes wieder, da 130 mm der Dar-

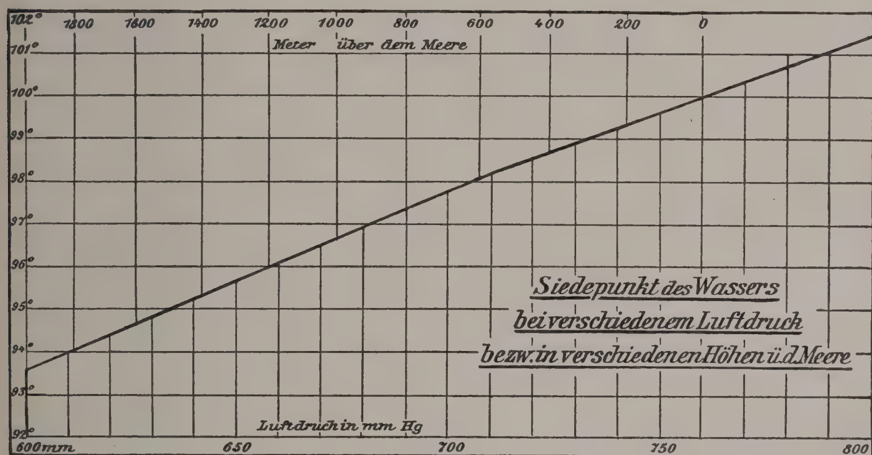


Fig. 20.

stellung einer Änderung des Barometerstandes um 1 mm entsprechen. Gib an, wann der höchste und wann der tiefste Barometerstand verzeichnet wurde und wie groß der Unterschied beider ist.

33. In Aufg. 20 ist die Siedetemperatur als Funktion des Druckes dargestellt. Stelle umgekehrt auf Grund der Angaben der betr. Aufgabe den Druck als Funktion der zugehörigen Siedetemperatur dar.

34. In Aufg. 18 sind die Sehnenlängen eines Kreises von 5 cm Radius als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt dargestellt. Stelle umgekehrt den Abstand der Sehnen vom Mittelpunkt als Funktion der Sehnenlänge dar.

Kurvenvergleichungen.

35. Deutschland hatte (in runden Zahlen) 1870: 41, 1875: 43,5, 1880: 45, 1885: 47,5, 1890: 49,5, 1895: 52,5, 1900: 55,5, 1905: 60,5, 1910: 64,5 Mill. Einwohner. Die entsprechenden Zahlen für Frankreich waren: 1870: 36, 1875: 37, 1880: 37,5, 1885: 37,5, 1890: 37,5, 1895: 38, 1900: 38,5, 1905: 39, 1911: 39,6 Mill. Einwohner. Gib eine vergleichende Darstellung der Bevölkerungszunahme.

36. Nach dem Einkommensteuergesetz in Preußen wurden vor dem Kriege, vom Zuschlag abgesehen, folgende Steuersätze erhoben: Bei einem Einkommen

		bis	900 ℳ	0 ℳ
von	900 ℳ	„	1050 ℳ	6 ℳ
„	1050 ℳ	„	1200 ℳ	9 ℳ
„	1200 ℳ	„	1350 ℳ	12 ℳ
„	1350 ℳ	„	1500 ℳ	16 ℳ
„	1500 ℳ	„	1650 ℳ	21 ℳ
„	1650 ℳ	„	1800 ℳ	26 ℳ
„	1800 ℳ	„	2100 ℳ	31 ℳ
„	2100 ℳ	„	2400 ℳ	36 ℳ
„	2400 ℳ	„	2700 ℳ	44 ℳ
„	2700 ℳ	„	3000 ℳ	52 ℳ
„	3000 ℳ	„	3300 ℳ	60 ℳ
„	3300 ℳ	„	3600 ℳ	70 ℳ
„	3600 ℳ	„	3900 ℳ	80 ℳ
„	3900 ℳ	„	4200 ℳ	92 ℳ
„	4200 ℳ	„	4500 ℳ	104 ℳ
„	4500 ℳ	„	5000 ℳ	118 ℳ
„	5000 ℳ	„	5500 ℳ	132 ℳ
„	5500 ℳ	„	6000 ℳ	146 ℳ
„	6000 ℳ	„	6500 ℳ	160 ℳ
„	6500 ℳ	„	7000 ℳ	176 ℳ
„	7000 ℳ	„	7500 ℳ	192 ℳ
„	7500 ℳ	„	8000 ℳ	212 ℳ
„	8000 ℳ	„	8500 ℳ	232 ℳ
„	8500 ℳ	„	9000 ℳ	252 ℳ
„	9000 ℳ	„	9500 ℳ	276 ℳ
„	9500 ℳ	„	10500 ℳ	300 ℳ.

Mit höherem Einkommen nähern sich die Steuersätze immer mehr einem Betrage von 4% des Einkommens. **a)** Gib eine graphische Darstellung der Steuersätze durch eine Treppenkurve (geeigneter Maßstab!). **b)** Bringe in dieser Darstellung zur Anschauung, welche Steuersätze bezahlt werden müßten, wenn durchweg, von der kleinsten Summe an, 4% des Einkommens als Steuer erhoben würden. **c)** Erläutere die Abweichungen der Treppenkurve von der nach b) gezeichneten Kurve.

37. Die Größe der magnetischen Deklination (vgl. auch die Aufg. 23 u. 25) weist eine Schwankung auf, die mit der Zahl der Sonnenflecken in Beziehung steht. Aus der beigegebenen Fig. 23, die auch die sog. magnetische Horizontalintensität angibt, wird die gegenseitige Abhängigkeit sofort deutlich. **a)** Wann treten die Maxima, wann die Minima auf? **b)** Welche Zeiträume liegen zwischen aufeinanderfolgenden Maximis, zwischen aufeinanderfolgenden Minimis?

Fig. 23

38. Der tägliche Gang der Bewölkung zeigt gewisse regelmäßige Änderungen. Fig. 24 gibt nach 6jährigen Beobachtungen in Potsdam den Gang der Bewölkung im Jahresdurchschnitt und dann gesondert die Durchschnitte für Frühling, Sommer, Herbst und Winter (nach O. Meißner). Die Zahlen links geben die Bedeckung des Himmels (in Zehnteln des Himmelsgewölbes) an, die Zahlen oben die Tagesstunden. **a)** Wann ist die Bewölkung in den einzelnen Jahreszeiten durchschnittlich am geringsten, **b)** wann am größten? **c)** In welcher Jahreszeit ist die Bewölkung durchschnittlich am geringsten, in welcher am größten?

39. In der Fig. 25 ist die Registrierung einer Erdbebenflutwelle zu Nagapatam in Indien am 30./31. Dezember 1881 wiedergegeben (nach Hobbs-Ruska) und darunter eine normale Gezeitenkurve. Weise an Einzelheiten nach, daß sich die Erdbebenflutwelle der normalen Gezeitenkurve superponiert hat. Wie könnte man die von dem Erdbeben herrührenden Flutwellen unabhängig von den Gezeiten erhalten? Versuche eine Darstellung dieser unabhängigen Flutwelle.

40. In der Fig. 26 ist Einfuhr, Ausfuhr und Gesamthandel von Australien von 1820 bis 1907 nach den Tabellen des Jahrbuchs des Commonwealth graphisch dargestellt. Die Seitenziffern

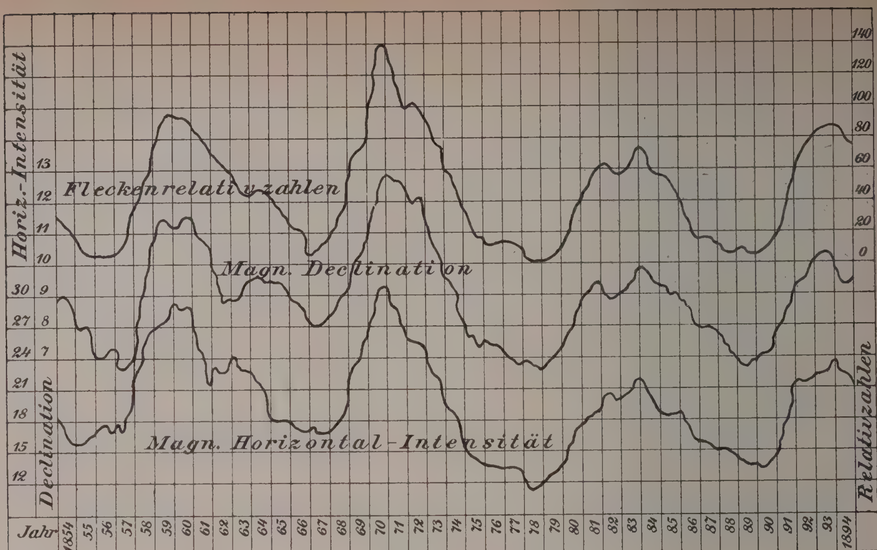


Fig. 23.

2a 4a 6a 8a 10a M 2p 4p 6p 8p 10p Mn

8,0 7,5 7,0 6,5 6,0 5,5 5,0 4,8

Fig. 24.

Jahr, Winter, Frühling, Sommer, Herbst

bedeuten Millionen £. Überzeuge dich durch graphische Addition der Kurven für Einfuhr und Ausfuhr von der Richtigkeit der Kurve für den Gesamthandel.

41. Fig. 27 gibt die Aufzeichnung der Flutkurve vom Mittag des 22. April 1884 bis Mittag des 30. April 1884 in Bombay (nach Darwin). Die Stunden von Mittag bis Mittag sind von 0 bis 24 bezeichnet. Man denke sich das graphische Blatt auf einen Zylinder aufgerollt derart, daß rechter und linker Rand aufeinanderpassen. Die Kurven sind von rechts nach links

aufgezeichnet. Der größeren Deutlichkeit halber sind die Kurven an den verschiedenen Tagen in verschiedener Weise ausgezogen. **a)** Gib die Zeiten für die Maxima und Minima an jedem Tage an. Um wieviel tritt das Maximum an einem Tage später als am Vortage ein? **b)** Stelle eine Tabelle der beiden Fluthöhen für die Zeit vom 22. bis 30. April auf. **c)** Stelle eine Tabelle für die gleiche Zeit auf, welche die Höhe des Seespiegels bei Ebbe verzeichnet. (Bruchteile der Stunden und der Fuß sind zu schätzen!)

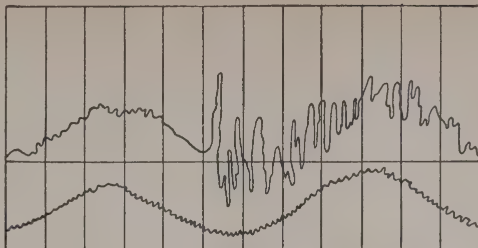


Fig. 25.

Vermischte Aufgaben.

42. Die Gotthardbahn hat folgende größere Stationen, denen die Höhe über dem Meeresspiegel beigesetzt ist:

0	km	Luzern	437 m
28	km	Arth — Goldau	513 m
40	km	Brunnen	441 m
51	km	Flüelen	437 m
60,5	km	Erstfeld	475 m
73,3	km	Gurtnellen	740 m
82	km	Wasen	930 m
89	km	Göschenen	1109 m
105	km	Airolo	1145 m
117	km	Rodi—Fiesso	945 m
125	km	Faido	758 m
139	km	Giornico	451 m
151	km	Biasca	296 m
163	km	Claro	253 m
170	km	Bellinzona	244 m

Der höchste Punkt wird in der Mitte des 15 km langen unmittelbar hinter Göschenen beginnenden Tunnels zwischen Göschenen und Airolo mit 1154 m erreicht. Die Steigung der Bahn ist graphisch darzustellen. Wähle einen geeigneten Maßstab. Wie groß ist die Überhöhung?

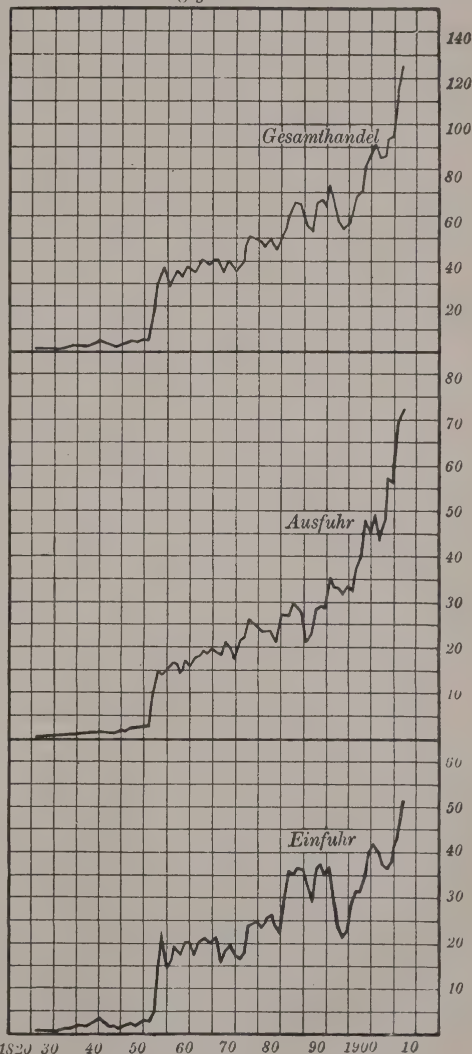


Fig. 26.

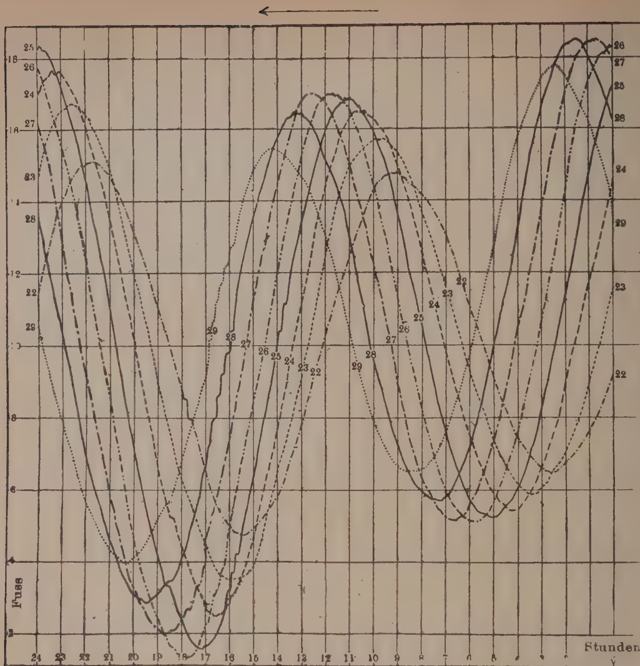


Fig. 27.

43. Die Längsprofile dreier Flüsse, der Garonne, der Seine und der Loire sind in der Fig. 28 (nach Davis) dargestellt. **a)—c)** Stelle für jeden der drei Flüsse eine Tabelle auf, wieviel km Flußlänge für den Abfall von 1200 m auf 1000 m, von 1000 m auf 800 m usf. bis 200 m auf 0 m erforderlich sind.

44. Von Ein- und Ausfuhr Deutschlands in den Jahren 1896—1910 gibt Fig. 29 ein Bild (nach Gruber). Die Zahlen rechts und links geben Milliarden Mark an.

a) Gib eine graphische Darstellung des Gesamthandels von Deutschland.

b) Gib eine graphische Darstellung des Überschusses der Einfuhr über die Ausfuhr.

45. Die starken Änderungen der Windgeschwindigkeit in kleinen Zeiträumen bringt die Darstellung in Fig. 30 zum Ausdruck. Es handelt sich um die Änderungen der nach m pro sec (senkrecht aufgetragen) gemessenen Geschwindigkeit des Windes in horizontaler Richtung (die sog. Horizontalkomponente) in der Zeit vom 8. Februar 1889, 8 Uhr 28 Min. morgens bis 8 Uhr 30 Min. morgens. Die Aufzeichnung ist bei einem recht starken Winde in Perpignan gemacht (nach Nimführ). Die Kurve ist von rechts nach links beschrieben. **a)** Gib die größte und die kleinste Windgeschwindigkeit und den Unterschied

	Aachen	Erfurt	Berlin	Posen	St. Bernhard	Genua
Januar	73	25	39	29	74	109
Februar	69	27	37	25	69	104
März	68	32	44	31	80	108
April	55	39	36	32	102	98
Mai	61	55	49	47	127	82
Juni	77	70	64	59	106	73
Juli	95	73	77	64	93	38
August	80	55	57	64	105	54
September	67	40	42	40	112	115
Oktober	76	44	46	35	147	204
November	77	36	43	32	102	192
Dezember	86	30	47	34	83	126

beider an. b) Versuche nach Augenmaß festzustellen, wie groß etwa die mittlere Windgeschwindigkeit ist.

46. Die nach den Jahren 1851—1900 berechnete normale Niederschlagsmenge ist in der Tabelle auf Seite 120 in mm angegeben (nach Sassenfeld): Die Niederschlagsmengen sind durch Treppenkurven graphisch darzustellen. **a)** Vergleiche die Kurve von Berlin und von Aachen

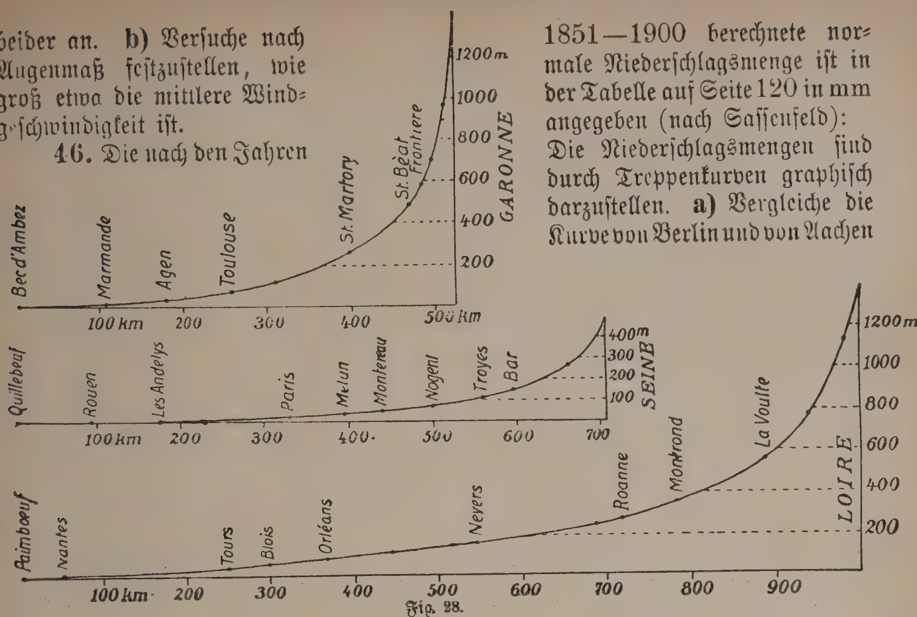


Fig. 28.

hinsichtlich ihres Verlaufes und bringe beiderseits die jährliche Niederschlagsmenge zur Anschauung. **b)** Vergleiche die Kurve von Posen und vom St. Bernhard hinsichtlich der jährlichen Niederschlagsmenge. **c)** Vergleiche die Kurven von Erfurt, vom Sankt Bernhard und von Genua daraufhin, in welchen Monaten die größten Niederschläge eintreten.

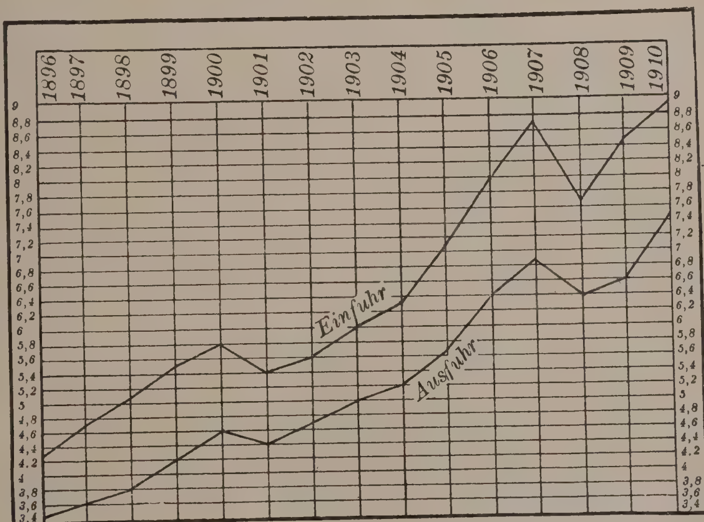


Fig. 29.

***47.** Fig. 31 (nach Schwinning) vereinigt in einer Darstellung die Flugbahnen des Rundkopfgeschosses und des Spitzgeschosses des deutschen Infanteriegewehres bei 800 m Schußweite. Eingezeichnet ist die Größe des bestrichenen Raumes. **a)** Beschreibe die Flugbahnen beider Geschosse und vergleiche sie. **b)** Erkläre den Begriff des bestrichenen Raumes und vergleiche dessen Größe bei den beiden Geschoßarten.

48. Fig. 32 (Tafel II) ist eine abgesehen von einigen geringfügigen Weglassungen genaue Wiedergabe eines graphischen Fahrplanes, wie er bei den Eisenbahnbehörden in ständigem Gebrauch ist. Es handelt sich um ein Blatt der Königl. Eisenbahndirektion Breslau und zwar um die obere Hälfte des auf Blatt 11 neben einer Reihe anderer Strecken gegebenen Fahrplanes von Dittersbach-Glatz. Aus den Angaben am Kopfe des Planes sind die Entfernungen zwischen den einzelnen Stationen ersichtlich. Darunter sind die Steigungsverhältnisse der Strecke graphisch veranschaulicht. In der Darstellung der Züge sind die Strecken dem Kopfe des Planes entsprechend horizontal, die Zeiten vertikal aufgetragen. Es ist nur der Plan von Mitternacht bis Mittag wiedergegeben. Die Züge sind durch Geraden bezeichnet, denen die Zugnummern und bei jeder Station die Ankunfts- und Abfahrtszeiten beigesetzt sind. Die Art des Zuges ist durch die Art der Darstellung angedeutet.

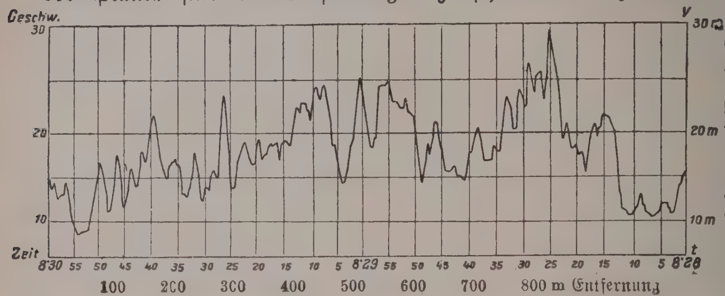


Fig. 30.

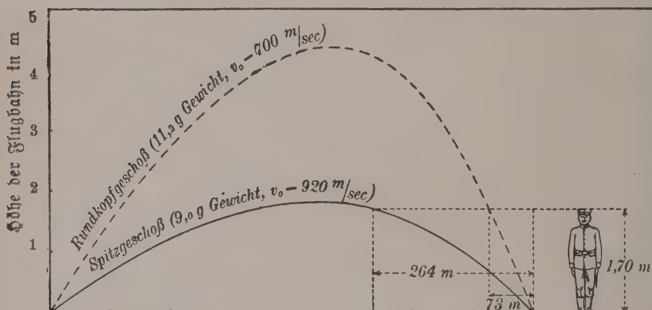


Fig. 31.

Fragen: **a)** Schreibe nach der Darstellung die Fahrpläne des um 5^{26} von Dittersbach, **b)** des um 9^{40} von Glatz abgehenden Personenzuges, **c)** der beiden Eilzüge 174 und 175 aus. **d)** Stelle den Fahrplan des nach Mitternacht von Dittersbach abgehenden Güterzuges, **e)** des von Glatz nach Dittersbach fahrenden Güterzuges N 9034 auf. **f)** Für den kurz vor 9 Uhr von Dittersbach abgehenden Personenzug 973 ist für Bedarfsfälle ein Vor- und ein Nachzug vorgesehen. Schreibe die Fahrzeiten für alle drei Züge aus. **g)** Zwischen 1 und 2 Uhr nachts soll ein Extraeilzug von Dittersbach nach Glatz eingelegt werden. Gib unter Berücksichtigung der Zuggeschwindigkeit einen Fahrplan und etwa notwendige Verlegungen von Güterzügen an. (Ist die Strecke ein- oder zweigleisig?)

49. Aus dem Kursbuch ist der folgende Fahrplan abgedruckt:

Goldap—Stallupönen und zurück.

5.30	1.25	4.26	8.20	...		ab	**Goldap**	an	7.51	11.22	4.11	W10.23	F9.45
5.45	1.48	4.47	8.34	...	8	↓	Trakischken	↑	7.37	11.08	3.53	10.05	9.31
5.54	2.14	5.03	8.43	...	13		Gr. Rominten		7.27	10.59	3.32	9.44	9.20
6.11	2.56	5.44	9.00	...	22		Tollmingkehm.		7.11	10.44	2.59	9.11	9.01
6.22	3.09	6.03	9.11	...	28		Cassuben		6.56	10.31	2.31	8.45	
6.41	3.25	6.28	9.25	...	36		Pillupönen		6.39	10.16	2.07	8.29	
6.57	3.43	6.51	9.39	...	45	↓	Göritten	↑	6.24	10.02	1.43	8.13	
7 07	3.53	7.05	9.49	...	51	an	**Stallup.**	ab	6.14	9.52	1.25	8.02	

(W bedeutet einen nur an Wochentagen, F einen nur an Sonn- und Feiertagen fahrenden Zug.) Zeichne nach diesen Angaben einen graphischen Fahrplan für die Personenzüge. (Wo stehen die km-Zahlen?)

50. Entwirf einen graphischen Fahrplan der Strecke Warburg—Altenbeken nach dem folgenden Kursbuchausschnitt:

Warburg—Altenbeken und zurück.

3.54	6.58	10.12	**10.34**	12.48	3.10	**3.59**	5.58	9.54		ab	**Warburg**	an	6.19	9.10	12.25	1.34	**2.35**	5.44	**6.25**	9 21	1
|	7.06	10.19	|	12.55	3.19	E	6.05	10.01	4	↓	Menne	↑	6.13	9.04	12.19	1.26	E	5.38	|	9.15	
SZ D	7.12	10.23	SZ	12.59	3.25	|	6.09	10.05	7	|	Nörde	|	6.08	9.00	12.13	1.20	|	5.34	SZ D	9.10	
	7.20	10.31	D	1.07	3 34	|	6.17	10.13	11	|	Bonenburg	|	6.02	8.53	12.06	1.13	|	5.28		9.04	
|	7.32	10.40	|	1.19	3.47	|	6.29	10.25	19	|	Willebadess.	|	5.49	8.42	11.53	1.00	**2.17**	5.15	|	8.53	
|	7.44	10.52	|	1.30	4.01	|	6.40	10.35	26	|	Neuenheerse	|	5.39	8.33	11.44	12.51	|	5.06	|	8.44	
|	7.52	11.01	|	1.37	4 11	|	6.49	10.42	33	↓	Buke	↑	5.29	8.22	11.33	12.40	|	4 56	|	8.33	
4.31	7.58	11.07	**11.16**	1.43	4.17	**4.37**	6.55	10.48	37	an	**Altenbeken**	ab	5.20	8.14	11.24	12.30	**1.54**	4.48	**5.47**	8 24	1

Die durchgehenden Züge (Schnell- und Eilzüge) sind stark auszuziehen.

51.—58. Löse die Aufgaben 120 bis 127 des § 17 graphisch.

§. 23. Lineare Funktionen.

Punkte im Koordinatensystem.

1. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte ein:

a) 1, 3 **b)** 7, 4 **c)** 2,5, 5 **d)** 1,8, 2,4
e) — 1, 3 **f)** — 7, 4 **g)** — 2,5, 5 **h)** — 1,8, 2,4
i) 1, — 3 **k)** 7, — 4 **l)** 2,5, — 5 **m)** 1,8, — 2,4
n) — 1, — 3 **o)** — 7, — 4 **p)** — 2,5, — 5 **q)** — 1,8, — 2,5.

2. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte ein:

a) 0, 3 **b)** 0, $2\frac{1}{2}$ **c)** 0, — $1\frac{1}{2}$ **d)** 6, 0
e) — $3\frac{1}{4}$, 0 **f)** — 2,4 0 **g)** $5\frac{1}{3}$, 0 **h)** 0, 0.

3. Gegeben sind die Strecken a und b; zeichne die Punkte mit den Koordinaten:

a) a, a **b)** b, a **c)** a, b **d)** a, $-b$
e) $-a$, $-b$ **f)** $-a$, b **g)** $-a$, $-a$ **h)** $-b$, $-a$.

Geraden im Koordinatensystem.

4. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, deren y-Koordinate **a)** 2, **b)** 1,2, **c)** — 3, **d)** 0 ist?

5. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, deren x-Koordinate **a)** 3, **b)** 2,5, **c)** — 1,5, **d)** 0 ist?

6. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, für die x-Koordinaten und y-Koordinaten gleich sind?

7. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, für die x-Koordinaten und y-Koordinaten dem absoluten Betrage nach gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt gleich sind?

8. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, deren x-Koordinaten und y-Koordinaten der Gleichung

a) $y = 2x$, b) $y = 2{,}5x$, c) $y = -3x$,

d) $y = \frac{x}{2}$, e) $y = -\frac{x}{3}$, f) $y = \frac{4}{5}x$

genügen. Welches ist die jedesmalige Steigung der Geraden?

9. Bei gleicher Arbeitsweise ist der Lohn der Arbeitszeit proportional. Der Tageslohn betrage **a)** 2 ℳ, **b)** 2,50 ℳ, **c)** 3 ℳ. Wie stellt sich der Lohn l, gemessen in Mark, als Funktion der Arbeitszeit t, gemessen in Arbeitstagen, dar? Stelle die drei Funktionen graphisch dar.

10. Bei Akkordarbeiten ist der Lohn der geleisteten Arbeit proportional. Es möge für das Zerschlagen von Steinen zu einem Chausseebau pro cbm 2,50 ℳ gezahlt werden. Wie stellt sich der Lohn, gemessen in Mark, dar als Funktion der Menge zerkleinerter Steine, gemessen in cbm? Stelle die Funktion graphisch dar.

11. Bei gleichförmiger Bewegung ist der Weg $s = c \cdot t$, wo c die Geschwindigkeit, t die Zeit bedeutet. Stelle s als Funktion von t dar, wenn **a)** $c = 1{,}2$ m pro sec (langsam gehendes Pferd), **b)** $c = 1{,}5$ m pro sec (normal gehender Mann), **c)** 2,2 m pro sec (Mann im Laufschritt), **d)** 3,5 m pro sec (Pferd im Trab) ist.

12. Stelle die Beziehung zwischen Celsius- und Reaumur-Graden graphisch dar, indem du **a)** die in Celsius gemessene Temperatur als Funktion der in Reaumur gemessenen, **b)** die in Reaumur gemessene Temperatur als Funktion der in Celsius gemessenen ausdrückst.

13[1]. Beim freien Fall abwärts ist die Geschwindigkeit, gemessen in m pro sec, $v = gt$, wo $g = 9{,}81$ und t die in Sekunden gemessene Zeit bedeutet. **a)** Stelle v graphisch dar. Lies aus der graphischen Darstellung ab, wie groß v **b)** für $t = 2$ sec, **c)** $t = \frac{1}{2}$ sec, **d)** $t = 1\frac{1}{2}$ sec, **e)** $t = 1{,}2$ sec ist.

14. Auf Zahlungen wird ein Rabatt von p% gegeben. Wie stellt sich die Rabattsumme als Funktion der in Rechnung gestellten Summe dar? Stelle die Funktion graphisch dar, wenn **a)** $p = 5$%, **b)** $p = 10$%, **c)** $p = 33\frac{1}{3}$% ist.

15. Die Jahreszinsen sind bei gleichbleibendem Zinssatz dem Kapital proportional. Gib die Funktion und ihre graphische Darstellung, wenn der Prozentsatz **a)** 3%, **b)** $3\frac{1}{2}$%, **c)** 4%, **d)** $4\frac{1}{2}$%, **e)** 5% ist.

16. Zeichne den geometrischen Ort der Punkte, deren Koordinaten der Gleichung

a) $y = 2x + 1$, b) $y = 2x + 3$, c) $y = 3x - 1$

genügen. Welches ist die Steigung der Geraden? Welche Strecke wird auf der y-Achse, vom Nullpunkt aus gerechnet, abgeschnitten? **d)** Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten a und b in der Funktion

$$y = ax + b?$$

Stelle die folgenden linearen Funktionen graphisch dar:

17. $y = x + 3$. **18.** $y = x - 2$.

19. $y = x - 0{,}5$. **20.** $y = 2x + 4$.

---

1) Bei den voraufgegangenen Aufgaben war die Wahl des Maßstabes auf der x-Achse und auf der y-Achse ohne weiteres klar. In den jetzt folgenden Aufgaben ist zunächst immer zu überlegen, wie man die Darstellung durch geeignete Wahl des Maßstabes möglichst zweckmäßig anlegt.

21. $y = 2x - 2$. **22.** $y = 3x - 0{,}5$.

23. $y = 10x - 7$. **24.** $y = \frac{x}{3} + 3$.

25. $y = \frac{2x}{3} + 4$. **26.** $y = 0{,}5 \cdot x - 5$.

27. $y = 1{,}8x - 1{,}8$. **28.** $y = -x + 3$.

29. $y = -x - 2$. **30.** $y = -3x + 4$.

31. $y = -\frac{3x}{4} + 1$. **32.** $y = -0{,}6x - 1$.

33. a) Wann geht die graphische Darstellung einer linearen Funktion durch den Nullpunkt? b) Wann ist sie parallel der x-Achse?

34. In der Fahrenheitschen Temperaturskala entspricht dem Nullpunkt der Celsiusskala 32°, dem Punkte 100° der Celsiusskala 212°. Gib eine graphische Darstellung der Beziehung zwischen beiden Skalen, indem du a) die Grade nach der Celsiusskala, b) die Grade nach der Fahrenheitskala als unabhängige Variable wählst.

35. a) Wann sind die Geraden, die zwei lineare Funktionen $y = a_1 x + b_1$ und $y = a_2 x + b_2$ darstellen, parallel? b) Wann schneiden sie sich auf der y-Achse?

36.—51. In welchem Punkte schneiden die in den Aufgaben 17—32 angegebenen Funktionen die x-Achse? Mit anderen Worten: Welches sind die Nullstellen dieser Funktionen?

52. Stelle die lineare Funktion $x + y = a$ dar, wo a eine gegebene positive Konstante (etwa $a = 4$) ist. Welche geometrische Bedeutung hat a?

53. Verfahre in gleicher Weise mit den Funktionen: a) $x - y = a$, b) $-x + y = a$, c) $-x - y = a$.

Bringe die folgenden Gleichungen erst auf die Form $y = ax + b$ und stelle dann y als Funktion von x graphisch dar (in 55 und 61 sind a und b als Strecken gegeben):

54. $2x + 3y = 43$. **55.** $bx + ay = c$.

56. $4x - 1{,}9y = 1$. **57.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7$.

58. $3\frac{1}{3}x = 8y$. **59.** $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}$.

60. $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2$. **61.** $ax + by = 0$.

62. $\frac{x+y}{x-y} = \frac{2}{3}$.

63. Die lineare Funktion

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ist graphisch darzustellen, wenn a) $a = 3$, $b = 4$, b) $a = -1$, $b = +2$, c) $a = -2$, $b = -3$ ist. Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten a und b?

64.—72. Bringe die Funktionen in den Aufgaben 54—62, soweit es möglich ist, auf die Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und stelle sie dann graphisch dar. Wann ist es nicht möglich, eine lineare Funktion auf diese Form zu bringen?

Gib an, durch welche Punkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten die folgenden Geraden gehen, oder mit anderen Worten: Gib die Lösungen der folgenden diophantischen Gleichungen an:

73. $x + y = 5.$ **74.** $3x + y = 20.$

75. $x + 7y = 30.$ **76.** $x - y = 2.$

77. $5x - 3y = 1.$ **78.** $7x - 4y = 5.$

79. $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}.$ **80.** $\frac{x}{8} = \frac{y}{5}.$

81. $x : y = 7 : 4.$

Graphische Lösung zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Gib an, in welchem Punkte sich die folgenden Geradenpaare schneiden, oder mit anderen Worten: Lies die Wurzeln der folgenden linearen Gleichungspaare mit zwei Unbekannten aus den graphischen Darstellungen der entsprechenden Funktionen ab:

82. $x + y = 4$, $y = x.$ **83.** $x + y = 8$, $y = 3x.$

84. $x = y$, $y = -x.$ **85.** $x + y = 3$, $x - y = 3$

86. $x = 2y$, $y = 2x.$ **87.** $x - y = 5$, $x + y = 7.$

88. $x - y = 2$, $y = \frac{x}{2}.$ **89.** $y - x = 3$, $x + y = 9.$

90. $y - x = 8$, $9x = y.$ **91.** $x = 3y - 2$, $x = 5y - 12.$

92. $7x - 5y = 15$, $7y - 5x = 3.$ **93.** $3x - 2y = 11$, $2x + 3y = 16.$

94. $x = 6 - y$, $y = 3x - 4.$ **95.** $4x + 6y = 5$, $6x + 4y = 5.$

96. $\frac{2x-1}{2y+1} = 1$, $x + y = 15.$ **97.** $\frac{3x+4}{3y+5} = 2$, $\frac{4x+3}{3y+2} = 3.$

Erläutere am graphischen Bilde der Funktionen, warum die folgenden Gleichungspaare keine Wurzeln haben:

98. $y - x = 5$, $3y - 3x = 6.$ **99.** $y + x = 7$, $10y = 5 - 10x.$

100. $x - y = 6$, $x = y.$ **101.** $x + y = 3$, $y = -x.$

102. $x = 3y + 5$, $2x - 10 = 6y.$ **103.** $2x + 5 = 6y - 9$, $3x + 1 = 9y - 20.$

104. Bestimme a und b in der Funktion $y = ax + b$ so, daß

a) $y = 3$ für $x = 2$, $y = 7$ für $x = 4$ wird;
b) $y = 1$ für $x = -1$, $y = 3$ für $x = +1$ wird;
c) $y = 0$ für $x = 0$, $y = 3$ für $x = 3$ wird;
d) $y = 0$ für $x = -3$, $y = 9$ für $x = 0$ wird;
e) $y = 0{,}7$ für $x = 2$, $y = 1{,}6$ für $x = 5$ wird.

Gib in jedem Falle eine graphische Darstellung der Funktion.

Interpolation.

Eine Kurve verlaufe zwischen den Punkten x_1, y_1 und x_2, y_2 angenähert geradlinig. Man bestimme durch Interpolation Näherungswerte y_3 der Funktion für einen Wert x_3 zwischen x_1 und x_2. Die Rechnung ist jeweilig durch eine graphische Darstellung zu begleiten.

105. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; a) $x_3 = 0{,}5$,
b) $x_3 = 0{,}1$,
c) $x_3 = 0{,}3$.

106. $x_1 = 7$, $y_1 = 1$; $x_2 = 9$, $y_2 = 2$; a) $x_3 = 8$,
b) $x_3 = 7{,}5$,
c) $x_3 = 8{,}5$.

107. $x_1 = 3$, $y_1 = 0{,}134$; $x_2 = 4$, $y_2 = 0{,}164$; a) $x_3 = 3{,}1$,
b) $x_3 = 3{,}2$,
c) $x_3 = 3{,}3$,
. . . .
i) $x_3 = 3{,}9$.

108. $x_1 = 5$, $y_1 = -0{,}5$; $x_2 = 6$, $y_2 = +3{,}75$; a) $x_3 = 5{,}2$,
b) $x_3 = 5{,}8$,
c) $x_3 = 5{,}6$.

Siebentes Kapitel.

Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§ 24. Der Potenzbegriff. Die Parabel.

Begriff der Potenz.

1. Stelle eine Tabelle der Quadrate der ganzen Zahlen 1 bis 20 auf.

2. a) Gib die Reihe der Differenzen der aufeinander folgenden Quadratzahlen an. **b)** Um wieviel unterscheidet sich das Quadrat der ganzen Zahl n von dem der nächstfolgenden ganzen Zahl?

3. a) Welche Ziffern treten in den Quadratzahlen an letzter Stelle auf? **b)** Untersuche die Reihenfolge, in der diese Ziffern in der Reihe der aufeinander folgenden Quadrate ganzer Zahlen auftreten.

4. Stelle eine Tabelle der Kuben der ganzen Zahlen von 1 bis 10 auf.

5. In einer Tabelle der Kuben ganzer Zahlen sind die letzten Ziffern von der dritten Potenz von 0 beginnend: 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9. — Dann beginnt die gleiche Reihe der letzten Ziffern von neuem. **a)** Beweise das. Gib ohne Rechnung die zweistellige Zahl an, deren Kubus **b)** 19683, **c)** 753571, **d)** 438976 ist.

6. Weise die folgenden Beziehungen nach:

a) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, **b)** $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$.

7. Stelle eine Tabelle der ersten 10 Potenzen der Zahlen **a)** 1, **b)** 2, **c)** 3, **d)** 5, **e)** 10 auf.

8. Berechne die folgenden Ausdrücke

a) $4^4 + 3^4$, **b)** $8^3 - 8^2$, **c)** $7^5 - 6^5$,
d) $3^2 - 2^3$, **e)** $2^9 - 9^2$, **f)** $4^6 - 6^4$.

9. Gib die ersten 10 Potenzen der Zahlen **a)** -1, **b)** -2 an.

Berechne

10. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$.

11. $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$.

12. $(-1)^1 - (-2)^2 + (-3)^3 - (-4)^4 + (-5)^5 + (-6)^6$.

13. $(-a)^7 + (-a)^8 + (-a)^9 + (-a)^{10} + (-a)^{11} + (-a)^{12}$.

14. a) $(+2)^3 + (-3)^2$, **b)** $(+3)^3 + (-3)^3$, **c)** $(+2)^4 + (-2)^4$.

15. a) $(-7)^2 - (-2)^7$, **b)** $(-3)^4 + (-4)^3$, **c)** $(-5)^2 - (-2)^5$.

16. a) $(+5)^3 - (-3)^5$, **b)** $(-3)^4 - (+5)^3$, **c)** $(+3)^7 - (-3)^7$.

17. a) $2^3 \cdot 3^2$, **b)** $2^7 \cdot 7^2$, **c)** $2^{10} \cdot 10^2$.

18. a) $2^3 \cdot 5^4$, **b)** $4^3 \cdot 5^6$, **c)** $4^3 \cdot 5^4$. **19. a)** $(\frac{3}{4})^4$, **b)** $(\frac{5}{6})^3$, **c)** $(1\frac{1}{4})^4$.

20. a) $(1\frac{1}{7})^3$, **b)** $0{,}5^2$, **c)** $0{,}01^3$. **21. a)** $1{,}2^3$, **b)** $0{,}3^3$, **c)** $1{,}01^2$.

22. a) Wie heißen die Größen a, n und b in dem Ausdruck $a^n = b$? **b)** Was für eine Zahl kann in dem Ausdruck $a^n = b$ die Zahl a, die Zahl n sein?

23. a) Ändert sich der Wert von a^b, wenn a und b vertauscht werden (a ebenso wie b als positive ganze Zahl vorausgesetzt)? **b)** Für welche Werte a und b tritt eine Ausnahme von dem eben gefundenen Ergebnis ein?

24. Welche Werte nimmt **a)** $(-1)^n$, **b)** $(-1)^{2n}$, **c)** $(-1)^{2n+1}$ an, wenn n die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft?

25. Das Bodesche Gesetz besagt: Man erhält die Bahndurchmesser der Planeten Venus, Erde usf., wenn man in dem Ausdruck $0{,}6 + 0{,}4 \cdot 2^n$ die Zahl n die Werte 1, 2 usf. durchlaufen läßt. **a)** Was ist als Einheit für den Bahndurchmesser angesetzt? **b)** Prüfe die Richtigkeit des Näherungswertes an den § 21, Aufg. 15 mitgeteilten Zahlen? **c)** Fügt sich Merkur dem Gesetz ein?

26.[1]) Nach einer Aufgabe aus dem Rechenbuch des Ahmes (1700 v. Chr.): 7 Personen besitzen je 7 Katzen, jede Katze vertilgt 7 Mäuse, jede Maus frißt 7 Ähren

1) Die Aufgaben 26 bis 30 sind, genau so wie viele der „aus alter Zeit" in diesem Buche wiedergegebenen Gleichungen ersten Grades, Phantasieaufgaben. Ihr paradoxes Ergebnis widerspricht der Wirklichkeit; aber gerade deshalb sind sie hier sehr geeignet, das schnelle Wachsen der Potenzen mit zunehmendem Exponenten recht deutlich zu machen.

Gerste, aus jeder Gerstenähre können 7 Maß Getreidekörner entstehen. Wieviel Maß Getreide sind das insgesamt, die der Nützlichkeit der Katzen zu danken sind?

27. Auf einer Leiter mit 10 Sprossen sitzen Tauben, auf der ersten eine, auf der zweiten zwei, auf der dritten vier usf., auf jeder Stufe doppelt soviel als auf der vorhergehenden. Wieviel Tauben müßten dann also auf der letzten Sprosse sitzen?

28. In der ältesten indischen Mathematik wird einmal nach der Zahl der ersten Elementarteilchen gefragt, die aneinandergelegt die Länge eines Yôjana erfüllen, und es wird dabei gesagt: 7 Elementarteilchen geben ein sehr feines Stäubchen, 7 von den sehr feinen Stäubchen ein feines Stäubchen, 7 feine ein vom Winde aufgewirbeltes Stäubchen, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Hasen, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Widders, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Stieres, deren 7 auf einen Mohnsamen gehen. 7 Mohnsamen geben einen Senfsamen, 7 Senfsamen ein Gerstenkorn, 7 Gerstenkörner ein Fingergelenk; 12 von diesen bilden eine Spanne, 2 Spannen eine Elle, 4 Ellen einen Bogen, 1000 Bogen einen Kroça, deren endlich 4 auf einen **Yôjana** gehen. **a)** Gib die Zahl der Elementarteiler eines **Yôjana in Potenzform an**; **b)** rechne die Zahl möglichst praktisch aus.

29. Ein Perlenhalsband bestand aus 40 Perlen. Ein Sonderling machte mit dem Besitzer als Preis aus, für die erste Perle ein Streichholz, für die zweite zwei, für die dritte vier, für jede folgende das Doppelte wie für jede vorhergehende zu zahlen. **a)** Wieviel Streichhölzer hätte er für die letzte Perle geben müssen? **b)** Wie teuer hätte er diese letzte Perle bezahlt, wenn 100 Streichhölzer einen Wert von 2 ℔ haben? **c)** Ein Schlauberger meint: „Ich würde unter diesen Umständen nur 10 Perlen kaufen!“ Wie teuer würde dieser die letzte Perle bezahlen?

30. Nach dem Berichte des arabischen Geschichtschreibers Jaʿqubi erbat sich der Erfinder des Schachspiels als Belohnung die Summe der Weizenkörner, welche herauskommt, wenn man auf das erste Feld des Schachbrettes 1 Korn legt, auf das zweite 2 usf., auf jedes folgende doppelt so viel als auf das vorhergehende. Wieviel Körner müßten danach auf dem letzten, dem 64. Felde, liegen? Versuche eine Vorstellung von dieser Menge zu geben!

Graphische Darstellungen.

31. a) Stelle unter Benutzung der Ergebnisse von Aufgabe **1** eine Tabelle der Quadratzahlen von 0,1, 0,2 usf. bis 2,0 auf. **b)** Gib danach eine graphische Darstellung der Funktion $y = x^2$ für den Bereich von $x = -2$ bis $x = +2$. **c)** Verfolge die Funktion über $x = -2$ und $x = +2$ hinaus.

32. Stelle die Funktion $y = c \cdot x^2$ dar, wo **a)** $c = 2$, **b)** $c = 3$, **c)** $c = \frac{1}{2}$, **d)** $c = 0{,}1$ ist.

33. Stelle die Funktion $y = -cx^2$ dar, wo **a)** $c = 1$, **b)** $c = 2$ **c)** $c = 3$, **d)** $c = \frac{1}{2}$, **e)** $c = 0{,}1$ ist.

34. Gib eine graphische Darstellung der Funktion $y = x^3$.

35. Zeichne unter Benutzung der graphischen Darstellung von $y = x^3$ das Funktionsbild von folgenden Funktionen:

a) $y = \frac{x^3}{2}$, **b)** $y = 2x^3$, **c)** $y = 0{,}1 \cdot x^3$,

d) $y = -x^3$, **e)** $y = -\frac{x^3}{3}$, **f)** $y = -0{,}01x^3$.

36. Stelle die Funktion $y = cx^4$ graphisch dar für **a)** $c = 1$, **b)** $c = -1$, **c)** $c = 0{,}2$.

37. Stelle die Funktion $y = c \cdot x^5$ graphisch dar für **a)** $c = 1$, **b)** $c = -1$, **c)** $c = 0{,}2$.

38. Wie ändert sich das graphische Bild der Funktion $y = x^n$, wenn n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4, 5 . . annimmt **a)** für Werte $x > 1$, **b)** für Werte $1 > x > 0$?

39. Welche Punkte sind **a)** allen Parabeln $y = x^n$, **b)** allen Parabeln $y = x^n$ mit geraden Exponenten, **c)** allen Parabeln $y = x^n$ mit ungeraden Exponenten gemeinsam (n eine positive ganze Zahl)?

40. a) Wann ist eine Parabel $y = x^n$ axialsymmetrisch? **b)** Welches ist die Symmetrieachse? **c)** Wie drückt sich diese Art der Symmetrie in der arithmetischen Form der Funktion aus?

41. a) Wann ist eine Parabel $y = x^n$ zentralsymmetrisch? **b)** Welches ist das Symmetriesystem? **c)** Wie drückt sich diese Art der Symmetrie in der arithmetischen Form der Funktion aus?

42. Wie ändert ein Proportionalitätsfaktor c in $y = cx^n$ das Bild der Parabel $y = x^n$?

43. Beim freien Fall gilt für die Fallstrecke s in der Zeit t die Formel $s = \frac{1}{2} g t^2$. Wenn s in Metern, t in Sekunden gemessen wird, so ist g angenähert 10. **a)** Stelle die Fallstrecke in geeignetem Maßstabe als Funktion der Zeit dar. **b)** Welcher Weg ist nach 1,3 Sekunden, **c)** nach 3,5 Sekunden zurückgelegt (Ablesung aus der graphischen Darstellung und Rechnung)? **d)** Nach wieviel Sekunden ist ein Weg von 10 m, **e)** von 50 m zurückgelegt (Ablesung aus der graphischen Darstellung; geeigneter Maßstab!)?

44. a) Stelle den Flächeninhalt eines Quadrates als Funktion der Quadratseite dar. **b)** Entnimm der Kurve, für welchen Wert der Quadratseite angenähert der Flächeninhalt 2 wird.

45. a) Stelle das Volumen des Würfels als Funktion der Würfelkante dar. **b)** Entnimm der Kurve, für welchen Wert der Würfelkante das Volumen angenähert 2 wird.

46. a) Stelle das Volumen einer quadratischen Säule mit der Höhe 3 als Funktion der Grundkante dar. **b)** Welche Länge muß man der Grundkante geben, wenn das Volumen 10 werden soll?

47. Stelle den Inhalt eines Kreises als Funktion des Radius dar; dabei nimm als Verhältnis von Umfang und Durchmesser **a)** 3, **b)** 3,14 und achte auf den Unterschied beider Funktionen bei wachsendem x. **c)** Stelle den Unterschied graphisch dar.

48. Geht ein elektrischer Strom von i Amp. durch einen Leiter, der den Widerstand w Ohm hat, so ist die in der Sekunde erzeugte Wärmemenge, in Kalorien gemessen, $W = 0{,}24 i^2 \cdot w$. **a)** Stelle W als Funktion von i bei einem Leiter vom Widerstande $w = 1$ dar. **b)** Wie groß ist die in der Sekunde erzeugte Wärmemenge bei einem Strom von 1,8 Amp. **c)** bei 3,2 Amp.? **d)** Welchen Strom muß man einschalten, um in der Skunde 1 Kalorie, **e)** um 1,5 Kalorien zu erhalten?

§ 25. Das Rechnen mit Potenzen.

Multiplikation von Potenzen.

In den folgenden Ausdrücken sind die Potenzen in Produktform zu schreiben und das Ergebnis ist wieder in Potenzschreibung wiederzugeben:

1. a) $a^7 \cdot a^5$, b) $b^4 \cdot b^3$, c) $c^8 \cdot c$.
2. a) $a^8 \cdot a^2$, b) $b^7 \cdot b^5$, c) $x \cdot x^5$.
3. Beweise die Formel

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Rechne mit Benutzung dieser Regel die folgenden Aufgaben[1]):

4. a) $x^n \cdot x^3$, b) $y^n \cdot y$, c) $z^{n-1} \cdot z$.
5. a) $p^n \cdot p^n$, b) $q^n \cdot q^{5n}$, c) $q^{m-n} \cdot q^n$.
6. a) $a^3 \cdot a^{x-4}$, b) $b^7 \cdot b^{20-x}$, c) $c^{x-4} \cdot c^5$.
7. a) $p^n \cdot p^{n-1}$, b) $q^{2n} \cdot q^{3-n}$, c) $r^n \cdot r^{5-2n}$.
8. a) $a^{3+x} \cdot a^{x-3}$, b) $b^{n+x} \cdot b^{5-x}$, c) $c^{x-7} \cdot c^{5+x}$.
9. a) $x^{m-n} \cdot x^{m+n}$, b) $x^{n+3} \cdot x^{n-4}$, c) $y^{n-1} \cdot y^{7-n}$.
10. a) $g^{n-x} \cdot g^{m+x}$, b) $h^{5-n} \cdot h^{n+x}$, c) $k^{m+n} \cdot k^{10-m}$.
11. a) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$, b) $x^7 \cdot x^8 \cdot x$, c) $x^n \cdot x^{n-1} \cdot x^{9-2n}$.
12. a) $2a^4 \cdot 3b^2$, b) $2a^3 \cdot 3a^2$, c) $5x^3 \cdot 8x$.
13. a) $2a^2 \cdot 3b^3 \cdot 7c^4$, b) $8x^7 \cdot 5x^4 \cdot 9x$, c) $3a^4 \cdot 2b^3 \cdot 5a^2$.
14. a) $a^3b^5 \cdot a^7b^3$, b) $a^4b \cdot a^8b^3$, c) $a^nb^m \cdot a^3b$.
15. a) $a^{n-1}b^{n+1} \cdot ab^2$, b) $x^2y^3 \cdot x^{n-2}y^{n-5}$, c) $x^3y^3 \cdot x^{n-2}y^{n-4}$.
16. $\frac{5}{9}a^2bx \cdot \frac{6}{7}ab^3y^2 \cdot \frac{4}{5}a^nbx^ny$.
17. $\frac{3}{4}a^nbx^3 \cdot \frac{4}{5}ab^mx^4 \cdot \frac{5}{6}a^2x^p$.
18. $a^{m+n-7} \cdot a^{2m-n+8} \cdot a^{11-3m}$.
19. $p^{2x-3y+5} \cdot p^{3x+2y-5} \cdot p^{x+6y}$.
20. $(x-y)^{n-2} \cdot (x-y)^{3-m} \cdot (x-y)^{m-1}$.
21. $a(a-b)^3 \cdot a^{n-1}b\,(a-b)^{n-3} \cdot a^2b^{n-1}$.
22. $7a^2b^3 \cdot 8a^4c^7 \cdot 25a^{n-5}b^{n-5}c^{n-5}$.
23. a) $(-a)^3 \cdot (-a)^4$, b) $(-a)^8 \cdot (+a)^5$, c) $(-a)^7 \cdot (+a)^4$.
24. a) $(-a)^{2n} \cdot a$, b) $(-a)^{2n} \cdot (-a)$, c) $(-a)^{2n} \cdot (-a)^3$.
25. a) $(-a)^{2n+1} \cdot (-a)$, b) $(-a)^{2n-1} \cdot (+a)^3$,
c) $(-a)^{2n-1} \cdot (-a)^{2m+1}$.
26. $(-3a^2b^{n-1}) \cdot (-5a^{n-3}c^{n+1}) \cdot (-4abc^{x-n})$.
27. a) $(a-b)^3 \cdot (b-a)^4$, b) $(a-b)^4 \cdot (b-a)^3$.
28. a) $(x-y)^n \cdot (y-x)^4$, b) $(x-y)^7 \cdot (y-x)^n$.
29. a) $(a-b) \cdot (b-a)^{2n-3}$, b) $(a-b)^5 \cdot (b-a)^{2n-3}$.

---

1) Gib bei Aufgabe 6 und 8 an, welche Ungleichungen für x erfüllt sein müssen, damit die Aufgaben einen Sinn haben, d. h. damit die Exponenten positiv sind. Mache die entsprechenden Angaben bei Aufgabe 7, 9 und 15 für n. Welche Ungleichungen müssen bei den Aufgaben 10 erfüllt sein? Untersuche, welche ganzen Zahlen für die Werte n und m in der Aufgabe 18 überhaupt nur in Betracht kommen.

30. $(a-b-c)^{n-1}\ (b+c-a)^{2n+1}$
31. $(2a+3b^2+4c^3)\cdot a^2b^2c^2$.
32. $(ab+ac+bc)\cdot a^3b^3c^3$.
33. $(3a^3-5a^2b^3+7b^2)\cdot 2ab^2$.
34. $(ab^2c^3-a^2b^3c-a^3bc^2)\cdot a^2b^3c^4$.
35. a) $(a^5+a^2)(a^3-a)$, b) $(p^7-p^4)(p^5+p)$.
36. a) $(x^8+x^3)(x^8-x^3)$, b) $(y^9+y^4)(y^6-y)$.
37. a) $(a^4+b^3)(a^4-b^3)$, b) $(a^4+b^4)(a^3-b^3)$.
38. a) $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$, b) $(a^m+b^m)(a^n-b^n)$.
39. a) $(3a^2-2b^3)(3a^2+2b^3)$, b) $(5a^3+3b^2c)(5a^3-3b^2c)$.
40. a) $(x^2+a)^2$, b) $(a-2x^2)^2$.
41. a) $(a^7-a^3)^2$, b) $(a^8-a)^2$.
42. a) $(a^m-a^n)^2$, b) $(2a^x-3a^y)^2$.
43. a) $(a^2-b)^3$, b) $(5a-3x^2)^3$.
44. a) $(a+b)^3+(a-b)^3$, b) $(x+1)^3+(x-1)^3$.
45. a) $(m+n)^3-(m-n)^3$, b) $(1+t)^3+(1-t)^3$.
46. a) $(a+b)^4$, b) $(a-b)^4$.
47. a) $(x+y)^4+(x-y)^4$, b) $(x+3)^4+(x-3)^4$.
48. a) $(a+x)^4+(a-x)^4$, b) $(x+5)^4-(x-5)^4$.
49. a) $(a+b)^5$, b) $(a-b)^5$.
50. a) $(a+t)^5+(a-t)^5$, b) $(x+2)^5+(x-2)^5$.
51. a) $(x+y)^5-(x-y)^5$, b) $(2x+3)^5-(2x-3)^5$.

Führe die Multiplikation der folgenden Potenzreihen gliedweise aus und ordne nach fallenden Potenzen von x:

52. $(x^9+x^6+x^3+1)\cdot(x^3-1)$.
53. $(x^8-x^6+x^4-x^2+1)\cdot(x^2+1)$.

Tue das gleiche bei der Multiplikation der folgenden homogenen Polynome und ordne nach fallenden Potenzen von a oder x:

54. $(a^4-a^2b^2+b^4)\cdot(a^2+b^2)$.
55. $(x^4-x^2y^2+y^4)\cdot(x^4+x^2y^2+y^4)$.
56. $(6a^2-11ab+3b^2)\cdot(9a^2-3ab-2b^2)$.
57. $(7a^2+ab-6b^2)\cdot(6a^2-ab-5b^2)$.
58. $(a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8)\cdot(a^2-b^2)$.
59. $(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)\cdot(a+b)$.
60. $(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)\cdot(a-b)$.
61. $(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)\cdot(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$.
62. $(16a^4-48a^3b+108a^2b^2-108ab^3+81b^4)\cdot(4a^2+12ab+9b^2)$.
63. $(81a^4-54a^3b-24ab^3+16b^4)\cdot(9a^2+6ab+4b^2)$.
64. $(x^5-2x^4y+x^3y^2-x^2y^3+2xy^4-y^5)\cdot(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)$.

65. $(x^6 + 3x^5y + 6x^4y^2 + 7x^3y^3 + 6x^2y^4 + 3xy^5 + y^6)\cdot(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$.

66. $(x^8 + x^7y + x^6y^2 + x^2y^6 + xy^7 + y^8)\cdot(x^4 - x^3y + xy^3 - y^4)$.

Beweise die Richtigkeit folgender identischer Gleichungen und gib eine Anzahl von Zahlenbeispielen dafür an.[1] Die Gleichungen sind in jedem Falle in Worte zu fassen:

67. $n^2(n+1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = (n^2 + [n+1])^2$.

68. $(a^2 + b^2)\cdot(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

69. $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

70. $(a + b + c - d)^2 + (a + b - c + d)^2 + (a - b + c + d)^2 + (-a + b + c + d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

71. $(a + b + c)^3 - 3(ab + ac + bc)\cdot(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Die folgenden Ausdrücke zerlege in Faktoren:

72. $a^{11} + a^8 - a^5$.

73. $a^3b^4 + a^2b^5 + a^5b^3$.

74. $a^2b^4c^3 + a^3b^4c^2 + a^4b^3c^2$.

75. $(a^2 - b^2) + (a^3 - b^3) + (a^4 - b^4)$.

76. $(a + b)^3 + (a^2 - b^2)c^2 + (a^3 + b^3)$.

77. $(u + v)^2(u - v)^4 + (u^2 - v^2)^3 + (u + v)^4(u - v)^2$.

Division von Potenzen.

In den folgenden Ausdrücken sind die Potenzen erst in Produktform zu schreiben. Das Ergebnis ist dann wieder in Potenzform wiederzugeben:

78. a) $\frac{a^8}{a^3}$, b) $\frac{a^{12}}{a^7}$, c) $\frac{b^{15}}{b^8}$.

79. a) $\frac{x^8}{x}$, b) $\frac{x^5}{x^{15}}$, c) $\frac{x}{x^{11}}$.

80. Beweise die Formeln

$$\text{I.}\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ wenn } m > n,$$

$$\text{II.}\quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ wenn } n > m.$$

Berechne unter Benutzung dieser Regeln die folgenden Ausdrücke[2]):

81. a) $\frac{a^n}{a^4}$, b) $\frac{a^3}{a^n}$, c) $\frac{a^2}{a^{n+1}}$.

---

1) Vgl. auch § 8, Aufg. 112.

2) Wenn im Exponenten Buchstabenzahlen stehen, so wird es meistens von der Größe dieser Buchstabenzahl abhängen, ob die Regel I. oder II. der Aufgabe 80 anzuwenden ist. Gib die Ungleichungen an, die für n gelten müssen, wenn in Aufg. 84 c, 85 b, 86 c, 90 c die Regel I., wenn in Aufg. 83 c, 84 b, 85 c, 86 a die Regel II. anzuwenden ist.

82. a) $\frac{a^{n+2}}{a^2}$, b) $\frac{a^n}{a^3}$, c) $\frac{x^{n-1}}{x^n}$.

83. a) $\frac{a^{x-1}}{a}$, b) $\frac{a^{x+1}}{a}$, c) $\frac{a^3}{a^{x+2}}$.

84. a) $\frac{x}{x^{n-1}}$, b) $\frac{x^2}{x^{n-2}}$, c) $\frac{x^{n+1}}{x^3}$.

85. a) $\frac{a^{x+3}}{a^7}$, b) $\frac{a^{n-2}}{a^3}$, c) $\frac{a}{a^{n-5}}$.

86. a) $\frac{x^3}{x^{n-4}}$, b) $\frac{x^5}{x^{5-n}}$, c) $\frac{a^7}{a^{5+n}}$.

87. a) $\frac{b^8}{b^{8-x}}$, b) $\frac{b^x}{b^{x-1}}$, c) $\frac{c^x}{c^{x+4}}$.

88. a) $\frac{a^{2n}}{a^{n-x}}$, b) $\frac{h^{x+n}}{h^{2x}}$, c) $\frac{k^{x+1}}{k^{x-1}}$.

89. a) $\frac{m^{x-1}}{m^{x-2}}$, b) $\frac{n^{x-5}}{n^{x+1}}$, c) $\frac{p^{x-2}}{p^{x+3}}$.

90. a) $\frac{a^{3+x}}{a^{x-3}}$, b) $\frac{a^{4+x}}{a^{5+x}}$, c) $\frac{a^{n-1}}{a^{8-n}}$.

91. a) $\frac{a^{n-1}}{a^{n+1}}$, b) $\frac{a^{n-x}}{a^{x-n}}$, c) $\frac{a^{x+n}}{a^{x-n}}$.

92. a) $\frac{a^{x+1}}{a^{5-x}}$, b) $\frac{a^{x+2}}{a^{7-5x}}$, c) $\frac{a^{5-x}}{a^{13-2x}}$.

93. a) $\frac{a^{8+x}}{a^{13-x}}$, b) $\frac{a^{x+5}}{a^{5-2x}}$, c) $\frac{a^{7+2x}}{a^{3x-7}}$.

94. a) $\frac{a^8 b^3}{a^3 b^8}$, b) $\frac{a^7 b}{a b^2}$, c) $\frac{a^6 b}{a^2 b^5}$.

95. a) $\frac{a^9 b^9}{a^4 b^4}$, b) $\frac{a^7 b^3}{a^3 b^7}$, c) $\frac{a^4 b^4}{a^6 b^6}$.

96. a) $\frac{a^n b}{a b^m}$, b) $\frac{a^n b^3}{a^3 b^m}$, c) $\frac{a^m b^{m-1}}{a^n b^{n-1}}$.

97. a) $\frac{a^{m+1} b^{n+1}}{a^m b^n}$, b) $\frac{a^{m-1} b^{n-1}}{a^m b^n}$, c) $\frac{a^{m+1} b}{a b^{n+1}}$.

98. a) $\frac{(a-1)^4 (x-1)^3}{(a-1)^3 (1-x)^4}$, b) $\frac{a^5 (x-y)^2}{a (y-x)^5}$, c) $\frac{a^3 (x+y)^2}{a (x-y)}$.

99. a) $\frac{a^n b^n (b-1)}{a^{n-1} b^{n-2} (1-b)^2}$, b) $\frac{a^2 b^2 (a-b)^5}{(a^2+b^2)(b-a)^2}$, c) $\frac{a^2-b^3}{b^2-a^3}$.

Bringe die folgenden Produkte von Brüchen durch Kürzen auf möglichst einfache Formen:

100. $\frac{2a^3x^5}{3b^2y^4} \cdot \frac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \frac{by}{a^2x^2}$.

101. $\frac{4a^7b^4}{5c^4d^3} \cdot \frac{15bc^3}{8a^6d^2} \cdot \frac{2cd}{3ab}$.

102. $\frac{2a^2b^3c}{3x^2y^3} \cdot \frac{a^m b^n c^r}{x^m y^n} \cdot \frac{6x^{m-1}y^{n-2}}{a^{m+1}b^{n+2}c^{r+3}}$.

103. $\frac{9a^2b^3}{8x^3y^n} \cdot \frac{10a^{n-1}x^{n+2}}{21b^{m+3}y^{m-n}} \cdot \frac{x}{a}$.

104. $\frac{3a^3c^n}{7x^3b^n} \cdot \frac{49x^{n-1}b^{n+2}}{9a^{n+5}c^{n+1}} \cdot \frac{a^2x^4}{c}$.

Bringe die folgenden Quotienten von Brüchen auf möglichst einfache Formen:

105. $\frac{2a^3b^7c^4}{3x^3y^4z^3} : \frac{4a^2b^8c^5}{5xy^5z^4}$.

106. $\frac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4} : \frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5}$.

107. $\frac{5a^nb^{n-1}c^{n-2}}{6x^{n+1}y^{n+2}z^{n+3}} : \frac{3a^{n-1}bc^{n+1}}{2xy^nz^{n+1}}$.

108. $\frac{5a^5b^3c^{n+1}}{6x^3y^nz^{n+4}} : \frac{3a^6b^4c}{8x^4yz^{n-1}}$.

In den folgenden Aufgaben ist ein Polynom durch ein Monom zu dividieren:

109. $(ax^7 + bx^3) : x^5$.
110. $(ax^{2m} + bx^{2n}) : x^{m+n}$.
111. $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) : x^4$.
112. $(ax^m + bx^n + cx^{m+n}) : x^{m-n}$.
113. $(3a^2b^3 + 2a^3c + 4a^3c^4) : 6a^3b^3c^3$.
114. $(10x^4y^3z^5 + 15x^2y^4z - 6xy^2z^4) : 30x^2y^3z^4$.

In den folgenden Aufgaben ist ein Polynom durch ein anderes Polynom zu dividieren:

115. $(6a^3 + 5a^2b - 13ab^2 - 12b^3) : (3a + 4b)$.
116. $(15a^3 + a^2b - 31ab^2 + 15b^3) : (5a - 3b)$.
117. $(9a^4 - 58a^2b^2 + 49b^4) : (3a^2 - 4ab - 7b^2)$.
118. $(144a^4 - 289a^2b^2 + 100b^4) : (12a^2 + 7ab - 10b^2)$.
119. $(12a^4 - a^3b - 32a^2b^2 + ab^3 + 20b^4) : (4a^2 + ab - 5b^2)$.
120. $(a^6 - b^6) : (a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$.
121. $(a^8 - b^8) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.
122. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$.
123. $(a^9 - 3a^6b^3 + 3a^3b^6 - b^9) : (a^4 - a^3b - ab^3 + b^4)$.
124. $(64a^6 + 432a^3b^3 + 729b^6) : (4a^2 + 12ab + 9b^2)$.
125. $(x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n)$.
126. $(x^{3m} + y^{3n}) : (x^m + y^n)$.
127. $(x^n - y^n) : (x - y)$.
128. $(x^n - 1) : (x - 1)$.
129. $(x^{2n} - y^{2n}) : (x^2 - y^2)$.
130. $(x^{2n+1} + 1) : (x + 1)$.

Die folgenden Summen von Brüchen sind auf einen Nenner zu bringen und möglichst zu vereinfachen:

131. a) $\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x}$, b) $\frac{1}{x^3}+\frac{1-x}{x^4}$.

132. a) $\frac{1-x^3}{x^5}+\frac{1}{x^2}$, b) $\frac{1-x^5}{x^7}+\frac{1}{x^2}$.

133. a) $\frac{1-x^2}{x^6}+\frac{1-x^2}{x^4}+\frac{1}{x^2}$, b) $\frac{1-x^2}{x^8}+\frac{1+x}{x^6}-\frac{1}{x^5}$.

134. a) $\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^{n-2}}$, b) $\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-p}}$.

135. a) $\frac{1+x}{x^n}-\frac{1-x}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-2}}$, b) $\frac{1-2x^2}{x^p}+\frac{2-3x}{x^{p-2}}+\frac{3}{x^{p-4}}$.

136. $\frac{a}{x^n}+\frac{b}{x^{n-1}}+\frac{c}{x^{n-2}}+\frac{d}{x^2}+\frac{e}{x}+f$.

137. $\frac{y^2}{(x-y)^n}+\frac{x}{(x-y)^{n-1}}+\frac{1}{(x-y)^{n-2}}$.

138. $\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}}-\frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$.

139. $\frac{a^x-b^y}{a^x+b^y}+\frac{a^x+b^y}{a^x-b^y}$. **140.** $\frac{a^x+b^y}{a^x-b^y}-\frac{a^x-b^y}{a^x+b^y}$.

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten.

141. Weise durch direktes Ausrechnen auf die einfachste Weise nach, daß a) $2^6\cdot 5^6=10^6$, b) $6^4\cdot 5^4=(6\cdot 5)^4$, c) $25^3\cdot 4^3=(25\cdot 4)^3$, d) allgemein

$$a^m\cdot b^m=(ab)^m$$

ist.

142. Weise durch direktes Ausrechnen auf die einfachste Weise nach, daß a) $\frac{15^3}{5^3}=3^3$, b) $\frac{30^2}{6^2}=5^2$, c) $\frac{20^4}{15^4}=(\frac{4}{3})^3$, d) allgemein

$$\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

ist.

Berechne auf möglichst einfache Weise die folgenden Ausdrücke:

143. a) $(1\frac{1}{2})^4\cdot(6\frac{2}{3})^4$, b) $(1\frac{1}{3})^3\cdot(1\frac{1}{2})^3$, c) $(7\frac{1}{2})^5\cdot(1\frac{1}{3})^5$.

144. $(-ax)^3\cdot(-by)^3\cdot(abxy)^{n-3}$. **145.** $(ab)^2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3$.

146. $\left(\frac{6a}{b}\right)^4\cdot\left(\frac{b}{4a}\right)^2\cdot\frac{b^2}{(3a)^3}$. **147.** $(-\frac{2}{3}ab)^5\cdot\left(\frac{6a}{5b}\right)^2\cdot\left(-\frac{3b}{8a}\right)^3$

148. $\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^4$. **149.** $\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{x}\right)^n$.

150. $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^n\cdot\left(\frac{c^2}{y^3}\right)^n\cdot\left(\frac{x^2y^3}{ac^2}\right)^n$. **151.** $\left(\frac{ax}{by}\right)^2\cdot\left(\frac{bx}{cy}\right)^3\cdot\left(\frac{cy}{ax}\right)^5$.

152. $\frac{(3xy)^2 \cdot (4xz)^3 \cdot (5yz)^4}{(25xyz)^2 \cdot (6xyz)^3}$. 153. $\frac{(6abx)^3 \cdot (10aby)^4}{(4ab)^4 \cdot (3ax)^3 \cdot (25by)^2}$.

154. $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^2$.

155. $\left(\frac{a-x}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{b^2-x^2}\right)^2$.

156. $\left(\frac{m-n}{m-p}\right)^4 \cdot \left(\frac{n-p}{n-m}\right)^4 \cdot \left(\frac{p-m}{p-n}\right)^4$.

Potenzierung von Potenzen.

157. Weise durch Ausrechnung oder Rückgang auf die Produkte, denen die Potenzen entsprechen, die Richtigkeit folgender Gleichungen nach: a) $(2^3)^2 = 2^6$, b) $(3^2)^3 = 3^6$, c) $(a^3)^4 = a^{12}$, d) $(b^n)^2 = b^{2n}$, e) allgemein

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Berechne:

158. a) $(a^n)^p$, b) $(a^3)^{x-1}$, c) $(x^{n+1})^4$.

159. a) $(-a^3)^2$, b) $(-a^2)^3$, c) $(-a^3)^5$.

160. a) $(-a^3)^{2n}$, b) $(-a^{2n})^3$, c) $(-a^{2n-1})^{2n}$.

161. a) $(-a^2)^{2n-1}$, b) $(-a^{2n-1})^2$, c) $(-a^{2n})^{2n-1}$.

162. a) $(a^4b^2)^5$, b) $(a^5b^7)^8$, c) $(x^ny)^3$.

163. a) $(2a^2b^3)^4$, b) $(3ab^{n-2})^5$, c) $(7a^2x^{n-1}y^r)^3$.

164. a) $\left(\frac{a^2b^3}{x^3y^4}\right)^5$, b) $\left(\frac{3ab^5}{2x^2y}\right)^4$, c) $\left(\frac{4a^4b^n}{3x^2y^{n+1}}\right)^3$.

165. a) $\frac{(a^2x^4)^4}{(ax)^{10}}$, b) $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(ab)^5}$, c) $\frac{(a^3b^4)^2}{(a^2b^3)^3}$.

Vermischte Aufgaben.

Berechne:

166. a) $(-a)^n \cdot (-a)^n$, b) $(-a)^{n+x} \cdot (-a)^{n-x}$, c) $(-a^{n-1})^2$.

167. a) $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}}$, b) $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2$, c) $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4$.

168. a) $\left(\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}\right)^4$, b) $\frac{1-a}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}}$, c) $\left(\frac{7ab^3}{5ax^3}\right)^4$.

169. $\left(\frac{3a^2b^2}{5x^2y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2ax^2}{3b^3y}\right)^3 : \left(\frac{4a^4}{5b^2y^6}\right)^2$. 170. $\left(\frac{2a^3x}{3by^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^3x^2}{3a^3y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9ay^6}{8b^3x^3}\right)^3$.

171. $(a^{2m} + 2a^{m+n} + a^{2n}) : (a^m + a^n)$.

172. $(a^{2x} - a^{x+1} + a^2) \cdot (a^{n+x} + a^{n+1})$.

173. $(a^{2x} - a^{2y}) : (a^x + a^y)$. 174. $(a^{n+1} + a^{n-2}) : (a+1)$.

175. Um wieviel unterscheiden sich $x^n - 1$ und x^{n-1}?

176. Welche mit drei Ziffern geschriebene Zahl ist die größte, wenn man auch Potenzschreibung und Klammern zuläßt?

§ 26. Gleichungen.

Arithmetische Lösungen.

Die folgenden Gleichungen lassen sich auf lineare zurückführen[1]):

1. $\frac{19x^7 - x^8}{2} + x^8 - 2x^7 = \frac{35x^7 - x^8}{3}$.

2. $\frac{13x^5 + 10x^4}{16} + x^5 = 55x^4 + \frac{30x^4 - x^5}{10}$.

3. $\frac{4-x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{5,5}{3x} = \frac{67}{15x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{5x^3}\right)$.

4. $8x^n - \frac{3}{4}x^{n+1} = 7x^n + \frac{1}{4}x^{n+1}$.

5. $\frac{4x^2 - x}{1+x} - \frac{3x}{1-x} = \frac{4x^3 + 2x}{x^2 - 1}$.

Löse die folgenden Exponentialgleichungen:

6. $a^{x+7} = a^{10}$. 7. $b^{5-x} = b^3$.

8. $p^{2x+3} = p^{8-3x}$. 9. $m^{3(x-5)} = m^{2(x-4)}$.

10. $(a^{x-5})^{x-6} = (a^{x-8})^{x-1}$. 11. $m \cdot m^{3(x-7)} = m^{5(x-9)} \cdot m^{x-5}$.

Löse die folgenden Exponentialgleichungen auf Grund der Kenntnisse von Quadrat- und Kubikzahlen und mache jeweilig die Probe:

12. $5^x = 25$. 13. $3^x = 27$. 14. $2^x = 1024$.

15. $2^x = 16$. 16. $(-2)^x = 16$. 17. $(-5)^x = -125$.

Graphische Lösungen.

Für die folgenden Gleichungen sind durch Schnitt einer festgezeichneten Parabel $y = x^2$ mit einer Geraden die Wurzeln graphisch zu bestimmen.[2]) Von der Richtigkeit der erhaltenen Näherungslösung soll man sich in jedem Falle durch Einsetzen überzeugen:

18. $x^2 = 4$. 19. $x^2 = 9$.

20. $x^2 = 2$. 21. $x^2 = 8$.

22. $x^2 - 2x = 0$. 23. $x^2 = x + 2$.

24. $x^2 = 2,25$. 25. $x^2 = 5x - 4$.

26. $x^2 + 2 = 3x$. 27. $x^2 = x + 12$.

28. $x^2 = 4x - 3$. 29. $x^2 + 2x = 1$.

Die Wurzeln der folgenden Gleichungen bestimme man graphisch durch Schnitt einer festgezeichneten Parabel dritten Grades $y = x^3$ mit einer Geraden:

30. $x^3 + x = 2$. 31. $x^3 - 8 = 0$.

32. $x^3 - 4x = 0$. 33. $x^3 - 3x + 2 = 0$.

34. $x^3 + x + 2 = 0$. 35. $x^3 - 7x + 6 = 0$.

---

1) Dabei ist gegebenenfalls auch auf die Lösungen $x = 0$ zu achten.

2) Die Aufgaben 18 bis 29, 36 bis 45 können auch nach der Behandlung der quadratischen Gleichungen gelöst werden. Löst man sie schon hier, so wird man dadurch die Bedeutung der graphischen Lösung für solche Fälle erweisen, bei denen die arithmetischen Lösungsmethoden noch unbekannt sind.

Begründe am graphischen Bilde, daß die folgenden Gleichungen je nachdem zwei, eine oder keine Wurzel haben[1]):

36. $x^2 + 2x + 1 = 0.$ **37.** $x^2 - 9 = 0.$

38. $x^2 + x + 1 = 0.$ **39.** $x^2 - 4x + 3 = 0$

40. $x^2 = 0.$ **41.** $x^2 + 4 = 0.$

Für die folgenden Gleichungen sind zur Lösung entweder geeignete Parabeln $y = ax^2$ oder die Parabel $y = x^2$ zu benutzen.

42. $4x^2 = 1.$ **43.** $6x^2 - x = 2.$

44. $3x^2 - x - 4 = 0.$ **45.** $2x^2 + 3x = 2.$

46. Zeige, welche Lage die Gerade $y = ax + b$ zur Parabel dritten Grades $y = x^3$ hat, wenn die Gleichung $x^3 = ax + b$ eine, zwei oder drei Wurzeln[2]) hat. Ist auch der Fall möglich, daß gar keine Wurzel vorhanden ist?

47. Stelle fest, welche Möglichkeiten für die Anzahl der Wurzeln[2]) bei dem Schnitt der Parabeln **a)** 4ten, **b)** 5ten Grades bestehen.

Für die folgenden Gleichungen sind zur graphischen Lösung Parabeln 4. und 5. Grades zu benutzen:

48. $x^4 - 16 = 0.$ **49.** $x^4 + x - 2 = 0.$

50. $x^5 + 1 = 0.$ **51.** $x^5 + x + 2 = 0.$

52. $x^5 - 1 = 0.$ **53.** $x^5 - 2 = 0.$

Gib auf Grund der Parabeldarstellung alle[2]) Wurzeln der folgenden Gleichungen an:

54. $x^4 = x^2.$ **55.** $x^4 = x^3.$

56. $x^5 = x^3.$ **57.** $x^4 = x.$

58. $x^6 = -x^2.$ **59.** $x^4 = -x.$

60. $x^3 = -x^3.$ **61.** $x^3 = -x^5.$

§ 27. Zahlsysteme.

Das dekadische Zahlsystem.

1. Schreibe als Summe von Zehnerpotenzen die Zahlen **a)** 375, **b)** 1100 **c)** 1003, **d)** 1000010.

2. Welches ist die allgemeine Form der Zahlen im dekadischen Zahlsystem?

3. Die hieroglyphischen Zahlzeichen[3]) für die ersten Zehnerpotenzen sind:

𓏺 – 1 𓎆 – 10 𓍢 – 10^2 𓆼 – 10^3

Lies folgende Zahlen in Hieroglyphen-Schrift:

a) 𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺 𓏺

b) 𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺

---

1) Gemeint sind hier natürlich nur reelle Wurzeln.

2) Hier kommen nur reelle Wurzeln in Frage.

3) Über die in diesem Kapitel benutzten Zahlzeichen und ihre Geschichte gibt ausführliche Auskunft E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme. Math. Bibl. 1. u. 34. Bd., 2. Aufl. Leipzig. B. G. Teubner. 1919.

Schreibe in Hieroglyphenschrift c) 375, d) 1218, e) 755 (beachte, daß nach je 4 Zeichen gleicher Einheiten eine Lücke gelassen wird).

4. Die römischen Zahlzeichen für die ersten Zehnerpotenzen sind:

$$I = 1, \quad X = 10, \quad C = 10^2, \quad M = 10^3.$$

Es werden jedoch für je 5 Einheiten neue Zeichen gebraucht, nämlich:

$$V = 5, \quad L = 5 \cdot 10, \quad D = 5 \cdot 10^2.$$

Außerdem ist bei der Ziffernschreibung zu beachten, daß eine niedrigere Einheit **vor** der höheren bedeutet, daß die Einheit zu subtrahieren ist. Lies: a) LXXII, b) CCCLVII, c) MDCXLIII, d) MDCCCXC, e) MCDXII. Schreibe in römischen Ziffern: f) 85, g) 93, h) 44, i) 1813, k) 1900, l) 1999.

5. Leite aus der allgemeinen Form der dekadischen Zahlen die Teilbarkeitsgesetze ab für a) 10, b) 5, c) 2.

6. Leite aus der allgemeinen Form der dekadischen Zahlen die Teilbarkeitsgesetze ab für die Teiler a) 4, b) 8, c) 16, d) 25, e) 125. f) Beweise den Satz: Eine Zahl ist durch 8 ohne Rest teilbar, wenn bei einem geraden Hunderter 8 in den letzten beiden Stellen aufgeht und wenn bei einem ungeraden Hunderter 8 in der um 4 vermehrten von den beiden letzten Stellen gebildeten Zahl aufgeht.

7. Leite aus der allgemeinen Form der dekadischen Zahlen die Teilbarkeitsgesetze für die Teiler a) 9 und b) 3 ab.

8. Weise nach, daß der Neunerrest einer Summe gleich der Summe der Neunerreste der Summanden ist.

9. Weise nach, daß der Neunerrest einer Differenz gleich der Differenz der Neunerreste von Minuendus und Subtrahendus ist.

10. Weise nach, daß der Neunerrest eines Produktes gleich dem Produkt der Neunerreste seiner Faktoren ist.

11. a) Weise nach, daß bei aufgehender Division der Neunerrest des Dividenden gleich dem Produkt aus den Neunerresten von Quotient und Divisor ist. b) Wie lautet die Regel für Divisionen mit Rest?

12. Wenn man an eine dreistellige Zahl die drei Ziffern in gleicher Reihenfolge anhängt, so ist die entstandene sechsziffrige Zahl a) durch 7, b) durch 11, c) durch 13 teilbar. Beweise das!

Zahlsysteme mit anderer Basis als 10.

13. Welches ist die allgemeine Form der Zahlen im Zahlsystem mit der Grundzahl a) 2, b) 5, c) 11, d) 12, e) 60, f) n?

14. Wieviel Ziffern braucht ein nach Art unseres arabischen Ziffernsystems eingerichtetes Zahlsystem mit der Grundzahl a) 2, b) 5, c) 11, d) 12, e) 60, f) n?

15. a—f) Welche Zahl ist in jedem der in Aufgabe 14 genannten Zahlsysteme die kleinste zweiziffrige Zahl?

16. a—f) Welche Zahl ist in jedem der in Aufgabe 14 genannten Zahlsysteme die größte zweiziffrige Zahl?

17. Wie schreibt man folgende dekadische Zahlen im System mit der Basis 7: **a)** 12, **b)** 21, **c)** 37, **d)** 49, **e)** 87, **f)** 100, **g)** 700, **h)** 8941?

18. Wie schreibt man folgende dekadische Zahlen im System mit der Basis 5: **a)** 17, **b)** 25, **c)** 50, **d)** 111, **e)** 333, **f)** 527?

19. Schreibe die dekadischen Zahlen **a)** 7, **b)** 9, **c)** 27, **d)** 40, **e)** 100 im System mit der Basis 3.

20. Wie lauten die folgenden Zahlen eines Zahlsystems mit der Basis 4 im dekadischen Zahlsystem: **a)** $(13)_4$, **b)** $(123)_4$, **c)** $(300)_4$, **d)** $(333)_4$, **e)** $(1023)_4$?

21. Wie lauten die folgenden Zahlen eines Zahlsystems mit der Basis 2 im dekadischen Zahlsystem: **a)** $(11)_2$, **b)** $(10)_2$, **c)** $(111)_2$, **d)** $(1001001)_2$, **e)** $(1011101)_2$?

22. Wenn z das Zeichen für 10, e das Zeichen für 11 ist, wie lauten dann die folgenden Zahlen eines Zahlsystems mit der Basis 12 im dekadischen Zahlsystem: **a)** $(317)_{12}$, **b)** $(8e0)_{12}$, **c)** $(700z)_{12}$, **d)** $(zz)_{12}$, **e)** $(ee)_{12}$?

Rechne im Zahlensystem mit der Basis 12 die folgenden Aufgaben ohne Rückgang auf das dekadische System:

23. $(317)_{12} + (8e0)_{12} + (700z)_{12}$.

24. $(8243)_{12} + (90e)_{12} + (7430)_{12} + (1581z)_{12}$.

25. $(783)_{12} - (415)_{12}$. **26.** $(845)_{12} - (97)_{12}$. **27.** $(647z)_{12} - (ze7)_{12}$

28. $(8)_{12} \cdot (7)_{12}$. **29.** $(9)_{12} \cdot (17)_{12}$. **30.** $(25)_{12} \cdot (7e)_{12}$.

31. $(81)_{12} \cdot (z3)_{12}$ $(200)_{12}$

32. Die babylonischen Zahlzeichen für die ersten Potenzen von 60 und deren Zehnfache sind:

𒁹 = 1, 𒌋 = 10, 𒁹 = 60, 𒌋 = $10 \cdot 60$, 𒁹 = 60^2, 𒌋 = $10 \cdot 60^2$

usf., woraus die Zahlen unter Benutzung des Stellenwertes zusammenzusetzen sind. Die Vielfachen der Einheiten werden durch Wiederholungen der Zeichen wiedergegeben. In eine Reihe werden nicht mehr als 3 Einheiten geschrieben, sind mehr als 3 Einheiten vorhanden, so werden sie in Reihen übereinander angeordnet. Schreibe folgende Zahlen im dekadischen System:

a) 𒁹𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹, **b)** 𒁹𒐏𒁹𒌋𒐚, **c)** 𒁹𒌋𒌋𒐙, **d)** 𒁹𒁹𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒌋𒐝.

Übertrage die folgenden Zahlen ins babylonische Sexagesimalsystem: **e)** 90, **f)** 115, **g)** 700, **h)** 1010, **i)** 800000.

Die Anzahl der Primzahlen.

33. Welche Zahlen geben **a)** bei der Division durch 4 den Rest 1, **b)** bei der Division durch 5 den Rest 3, **c)** bei der Division durch 8 den Rest 1, **d)** den Rest 2, **e)** bei der Division durch a den Rest b? **f)** Bei der Berechnung der kirchlichen Festtage wird die „goldene Zahl" gebraucht. Die goldene Zahl eines Jahres ist der Rest, der bei der Division durch 19 bleibt. Nenne im 20. Jahrhundert die Jahre mit der goldenen Zahl 17, im 19. Jahrhundert die Jahre mit der goldenen Zahl 1, im 15. Jahrhundert die Jahre mit der goldenen Zahl 12.

34. Warum ist jede Primzahl außer 1, 2 und 3 von der Form $6n \pm 1$?

35[1]. Stelle auf möglichst einfache Weise eine Tabelle der Primzahlen bis 200 auf (Sieb des Eratosthenes).

36. Welche Zahlen ergeben **a)** bei der Division durch 3 und ebenso bei der Division durch 5 den Rest 1, **b)** bei der Division durch 4 und ebenso bei der Division durch 7 den Rest 3?

37. Welche Zahlen geben bei der Division durch 3, durch 4, durch 5 jedesmal **a)** den Rest 2, **b)** den Rest 0?

38. Es seien 2, 3, 5, 7 ... p die sämtlichen Primzahlen eines gewissen Stückes der Reihe der positiven ganzen Zahlen. **a)** Welche Zahl läßt dann bei einer Teilung durch alle diese Primzahlen von 2 bis p den Rest 1, ist also sicher durch keine dieser Primzahlen teilbar? **b)** Muß diese Zahl eine Primzahl sein oder besteht noch eine andere Möglichkeit? **c)** Was folgt aus der Überlegung a) und b) für die Anzahl aller Primzahlen?

Achtes Kapitel.

Potenzen mit negativen Exponenten.

§ 28. Das Rechnen mit Potenzen mit negativen Exponenten.

Der Begriff der Potenz mit negativem Exponenten.

1. Untersuche, welche von den folgenden für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten bewiesenen Gesetzen:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, wenn $m > n$ ist,

c) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, wenn $m < n$ ist,

d) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

f) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

erhalten bleiben, wenn man definiert $a^0 = 1$.

Gib weiter an, welche erhalten blieben und welche nicht, wenn man $a^0 = 0$ definieren würde. (Die Untersuchung kann in der Weise angestellt werden, daß $n = 0$ gesetzt wird.)

2. a—f) Untersuche, welche Gesetze für die Potenzen mit positiven ganzen Exponenten (siehe Aufg. 1) erhalten bleiben, wenn man definiert

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Gib weiter an, welche erhalten blieben und welche nicht, wenn man etwa $a^{-n} = -a^n$ definieren würde. **g)** Wenn man negative ganze Exponenten zuläßt, so verringert sich die Zahl der in Aufgabe 1 angegebenen Formeln um 2. Welche sind überflüssig? Welcher Vorteil erwächst aus der Zulassung negativer Exponenten? Welche Voraussetzung muß man über a machen?

---

1) Vgl. § 12, Aufg. 35.

3. Bilde die beiderseitig unendliche Zahlenreihe **a)** 10^n, **b)** 2^n für positive und negative ganze Exponenten n.

Berechne:

4. a) $9 \cdot 3^{-2}$, **b)** $8 \cdot 2^{-2}$, **c)** $16 \cdot 4^{-3}$.

5. a) $9^2 \cdot 3^{-5}$, **b)** $25^3 \cdot 5^{-4}$, **c)** $96 \cdot 2^{-6}$.

6. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, **b)** $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, **c)** $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$.

7. a) $\frac{1}{4^{-2}}$, **b)** $\frac{1}{3^{-3}}$, **c)** $\frac{1}{2^{-5}}$.

8. a) $\frac{5}{2^{-1}}$, **b)** $\frac{8}{5^{-3}}$, **c)** $\frac{25}{4^{-4}}$.

9. a) $(0{,}2)^{-1}$, **b)** $(0{,}5)^{-2}$, **c)** $(1{,}5)^{-2}$.

10. a) $(-0{,}1)^{-2}$, **b)** $9 \cdot (4{,}5)^{-1}$, **c)** $10 \cdot (2{,}5)^{-1}$.

In den folgenden Ausdrücken sind alle negativen Exponenten und der Exponent 0 zu beseitigen:

11. a) $a^0 x^0$, **b)** $3a^0$, **c)** $4(a-b)^0$.

12. a) $5^0(x-y)$, **b)** $7^0(x+y)^0$, **c)** $(a^0)^n$.

13. a) $(a^n)^0$, **b)** $(a^0)^0$, **c)** 1^{-n}.

14. a) x^{-n}, **b)** $\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$, **c)** $\left(\frac{a}{x}\right)^{-n}$.

15. a) x^{-1}, **b)** $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$, **c)** $\left(\frac{5}{x}\right)^{-2}$.

16. a) $3\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$, **b)** $a\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}$, **c)** $\frac{1}{x}\left(\frac{m}{x}\right)^{-1}$.

17. a) $\frac{1}{a^{-1}}$, **b)** $\frac{1}{a^{-n}}$, **c)** $\frac{a}{b^{-n}}$.

18. a) $\frac{1}{a^0}$, **b)** $\frac{a^0}{b^{-n}}$, **c)** $\frac{a^{-n}}{x^0}$.

19. $ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + ex^0$.

20. $\frac{a}{x^{-4}} + \frac{b}{x^{-3}} + \frac{c}{x^{-2}} + \frac{d}{x^{-1}} + \frac{e}{x^0}$.

Multiplikation und Division.

Berechne:

21. a) $a^5 \cdot a^{-3}$, **b)** $b^{-4} \cdot b^{-7}$, **c)** $c^7 \cdot c^{-8}$.

22. a) $p^8 \cdot p^{-5}$, **b)** $q^{-11} \cdot q^9$, **c)** $r^{12} \cdot r^{-10}$.

23. a) $x^m \cdot x^{-n}$, **b)** $y^m \cdot y^{-3}$, **c)** $z^{n+3} \cdot z^{-5}$.

24. a) $a^{-3}x \cdot a^{-5}y$, **b)** $a^{-7}x \cdot ax^{-2}$, **c)** $8a^{-4} \cdot 3a^3$.

In den folgenden Brüchen sind die Nenner zu beseitigen:

25. a) $\frac{a^8}{a^{-3}}$, **b)** $\frac{b^{-4}}{b^{-9}}$, **c)** $\frac{c^{-8}}{c^{-5}}$.

26. a) $\frac{a^{-5}}{a^{11}}$, **b)** $\frac{b^{-5}}{b^{-11}}$, **c)** $\frac{x^5}{x^{-11}}$.

27. a) $\frac{a^m}{a^{-n}}$, b) $\frac{b^{n-3}}{b^{-5}}$, c) $\frac{x^{-n}}{x^{n-2}}$.

28. a) $\frac{a^{-2}b^3}{x^4y^{-5}}$, b) $\frac{ab^{-4}}{x^{-1}y^0}$, c) $\frac{a^{-3}b^{-m}}{x^{-4}y^{-n}}$.

29. a) $\frac{2a^0b^{+1}c^{-3}}{3x^0x^{-1}z^{-2}}$, b) $\frac{4a^3b^{-5}c^0}{x^{-4}yz^{-1}}$, c) $\frac{36a^{-2}b^{-1}c^5}{48x^3y^{-5}z^{-2}}$.

30. a) $\frac{3a^{-2}b^3c^0}{5a^5b^{-4}c^{-2}}$, b) $\frac{7a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{8a^{-2}b^{-3}c^{-4}}$, c) $\frac{36a^0b^{-4}}{24a^{-1}b^3c^{-4}}$.

31. a) $\frac{54x^5y^{-7}z^4}{42x^{-1}y^{-8}z^{-4}}$, b) $\frac{18x^{-4}y^{-5}z}{24x^{-3}y^3z^{-1}}$, c) $\frac{21x^{-1}y^5z^{-3}}{35x^{-2}y^6z^{-4}}$.

32. a) $\frac{a^3b^{-4}}{x^{-7}y^5} \cdot \frac{a^{-4}b^5}{x^9y^{-3}}$, b) $\frac{2a^4b^{-3}}{3x^4y^{-3}} \cdot \frac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3}$.

33. a) $\frac{3a^{-1}b^{-2}}{4x^{-2}y^{-4}} \cdot \frac{6a^2x^{-1}}{5b^{-1}c^2}$, b) $\frac{15a^3b^{-2}}{16x^5y^{-4}} \cdot \frac{12a^{-4}b}{25x^{-7}y^2}$.

34. a) $a^{-8} : a^{-8}$, b) $\frac{3}{4}x^{-3} : \frac{1}{8}x^3$, c) $(x-y)^{-2} : (y-x)^{-1}$.

35. a) $\frac{a^{-4}b^5c^{-2}}{x^{-1}y^{-2}z^3} : \frac{x^2y^3z^4}{a^4b^{-4}c^4}$, b) $\frac{a^{-2}x^4y^{-6}}{b^3c^{-4}z^{-5}} : \frac{a^{-3}b^{-5}x^3}{c^{-5}y^6z^{-7}}$.

Potenzierung.

Berechne:

36. a) $(a^{-2})^{-3}$, b) $(a^{-3})^2$, c) $(a^{-3})^0$.

37. a) $(-a^2)^{-5}$, b) $(-a^5)^{-2}$, c) $(-a^{-5})^{-2}$.

38. a) $(-a^3)^{-4}$, b) $(-a^{-3})^4$, c) $(-a^{-4})^{-3}$.

39. a) $(-a^3)^{-2n}$, b) $(-a^{2n})^{-3}$, c) $(-a^{-2n})^{-3}$.

40. a) $(-a^{-2})^{2n-1}$, b) $(-a^{-3})^{2n-1}$, c) $(-a^{2n-1})^2$.

41. a) $\left(\frac{a^{-2}b^3}{x^{-1}y^{-4}}\right)^2$, b) $\left(\frac{a^{-3}b}{x^3y^{-2}}\right)^{-3}$, c) $\left(\frac{a^{-1}b^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-2}$.

42. a) $\left(\frac{a^0b^{-2}}{xy^3}\right)^3$, b) $\left(\frac{a^{-2}b^0}{x^4y^{-1}}\right)^{-2}$, c) $\left(\frac{a^5b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^{-1}$.

Vermischte Aufgaben.

In den folgenden Ausdrücken sind die Nenner durch Einführung von Potenzen mit negativen Exponenten wegzuschaffen:

43. a) $\frac{n}{x^n}$, b) $\frac{n+1}{x^{n+1}}$, c) $\frac{n-1}{x^{n-1}}$.

44. a) $x + \frac{1}{x}$, b) $a^x + \frac{1}{a^x}$, c) $y^n - \frac{1}{y^n}$.

45. a) $\frac{a-b}{x^{a-b}}$, b) $\frac{a}{x^4} - \frac{b}{x^2}$, c) $1 - \frac{1}{x}$.

46. a) $\frac{1}{1+x}$, b) $\frac{1}{1+x^n}$, c) $\frac{1}{(1+x)^2}$.

47. a) $\frac{1}{(a+b)^n}$, b) $\frac{1}{a^n+b^n}$, c) $\frac{n-1}{(1+x)^{n-1}}$.

48. a) $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$, b) $\left(\frac{1}{a+b}\right)^n$, c) $a\left(1+\frac{b}{a^2}\right)$.

Ersetze in folgenden Ausdrücken n durch $-n$ und bringe den neuen Ausdruck auf möglichst einfache Form:

49. a) x^{-n}, b) x^{-n-1}, c) x^{n+1}.

50. a) $\frac{1}{x^n}$, b) $\frac{1}{x^{n+1}}$, c) $(n+1)x^{n+1}$.

51. a) $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, b) $\frac{x^{n-1}}{n-1}$, c) $\frac{(n+1)}{(1+x)^n}$.

§ 29. Hyperbeln.

Hyperbolische Kurven.

1. Stelle die Funktionen **a)** $y = x^1$, **b)** $y = x^0$ graphisch dar.

2. a) Gib eine graphische Darstellung der Funktion $y = x^{-1}$ unter Berücksichtigung positiver und negativer x. **b)** Ist die Kurve axialsymmetrisch? (Begründung!) **c)** Ist die Kurve zentralsymmetrisch? (Begründung!)

3. a) Leite aus der Hyperbel $y = x^{-1}$ das Bild der Funktion $y = -x^{-1}$ her. **b)** Leite ebenso aus der Hyperbel $y = x^{-1}$ das Bild der Funktion $y = ax^{-1}$ her. ($a = 2, \frac{1}{2}$.) **c)** Untersuche, wie es mit den Symmetrieverhältnissen der Kurve $y = ax^{-1}$ steht.

4. Stelle die Funktionen **a)** $y = x^{-2}$, **b)** $y = x^{-3}$ graphisch dar. Untersuche in jedem Falle, ob die Kurve axial- oder zentralsymmetrisch ist.

5. Welchem Werte nähert sich **a)** x^{-1}, **b)** x^{-2}, **c)** x^{-n} (n eine positive ganze Zahl), wenn x sich dem Werte 0 von der positiven, von der negativen Seite her nähert? Wie kommt das im Funktionsbild zum Ausdruck?

6. Beschreibe den Verlauf der Kurven **a)** $y = x^{-n}$, **b)** $y = ax^{-n}$ und gib eine Darstellung der Kurvenschar, wenn n nacheinander die Werte 1, 2, 3 ... annimmt. Auf welche Kurvenschar führen die Werte $n = -1, -2, -3$ usf.?

7. Gib eine graphische Darstellung davon, wie sich die reziproken Werte der Zahlen ändern, wenn sich die Zahlen selbst ändern.

8. Ein Quadrat von dem Flächeninhalt 2,25 soll in flächengleiche Rechtecke verwandelt werden. Stelle eine Seite des Rechtecks als Funktion der anderen dar.

9. Für die Ausführung eines großen Unternehmens sind bei einer Arbeitszeit von $1\frac{1}{2}$ Jahren 250 Arbeiter nötig. Stelle die Änderung der Arbeitszeit bei Änderung der Arbeiterzahl graphisch dar. (Geeigneter Maßstab!)

10. Zwischen dem Druck p und dem Volumen v eines bei konstanter Temperatur gehaltenen Gases gilt das Gesetz, daß das Produkt $p \cdot v$ einen konstanten Wert behält. Stelle die Beziehung zwischen p und v dar für den Fall, daß es sich um eine Luftmenge handelt, die bei einem Druck von 1 Atmosphäre ein Volumen von $\frac{1}{2}\,l$ besitzt.

11. Das Ohmsche Gesetz sagt aus, daß zwischen der Stromstärke i, der Spannung e und dem Widerstand w die Beziehung gilt $i = \frac{e}{w}$. Stelle i als Funktion von w bei einer Spannung von **a)** 110 Volt, **b)** 220 Volt (beides in einer Zeichnung!) dar.

12. Die Anziehungskraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2 (oder zwei Magnetpolen mit den Polstärken m_1 und m_2 oder zwei elektrischen Ladungen m_1 und m_2) ist durch das Gesetz $K = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ gegeben, wo k eine Konstante ist. Stelle K als Funktion von r graphisch dar. — Für das Produkt $k \cdot m_1 \cdot m_2$ ist eine Konstante anzunehmen, es mag etwa gleich der Einheit gesetzt werden. Welcher Unterschied würde sich in der Änderung der abhängigen Variablen ergeben, wenn r nur in der ersten Potenz im Nenner aufträte?

13. Die Beleuchtungsstärke gleichgroßer paralleler Flächen ist durch die Gleichung $E = \frac{J}{r^2}$ gegeben, wo J die Beleuchtung einer gleichgroßen parallelen Fläche im Abstande 1 bedeutet. Stelle E als Funktion von r dar für eine irgendwie gegebene Größe J.

Graphische Lösung von Gleichungen.

Löse durch Schnitt einer gleichseitigen Hyperbel $y = x^{-1}$ mit einer Geraden die folgenden Gleichungen (die Richtigkeit der Lösungen ist durch Einsetzen zu erproben):

14. $\frac{1}{x} - 2 = 0$. **15.** $\frac{1}{x} - 4 = 0$.

16. $\frac{2}{x} + x = 3$. **17.** $\frac{3}{x} + x = 4$.

18. $\frac{1}{x} - x = 1$. **19.** $\frac{2}{x} = x + 1$.

20. $\frac{2}{x} - x + 1 = 0$. **21.** $\frac{2}{x} - 2x + 3 = 0$.

Begründe am graphischen Bilde, warum die folgenden Gleichungen je nachdem zwei, eine oder keine (reelle) Wurzel haben:

22. $\frac{1}{x} + x = 2$. **23.** $\frac{1}{x} + x = 0$.

24. $\frac{1}{x} - x = 0$. **25.** $\frac{1}{x} = 0$.

Löse durch Schnitt einer Hyperbel zweiten bzw. dritten Grades mit einer Geraden folgende Gleichungen (die Richtigkeit der Lösungen ist durch Einsetzen des gefundenen Wertes in die Gleichung zu erproben):

26. $\frac{1}{x^2} - 1 = 0$. **27.** $\frac{1}{x^2} - x = 0$.

28. $\frac{1}{x^2} - x - 2 = 0$. **29.** $\frac{4}{x^2} - x - 2 = 0$.

30. $\frac{1}{x^3} + x = 2$. **31.** $\frac{1}{x^3} - x = 0$.

§ 30. Dezimalbrüche.

Das Rechnen mit Dezimalbrüchen.

1. Schreibe als Summe von Zehnerpotenzen die Zahlen **a)** 35,1789, **b)** 3517,89, **c)** 3,51789, **d)** 351,789, **e)** 0,351789, **f)** 30,1005, **g)** 3010,05, **h)** 3,01005, **i)** 301,005, **k)** 0,301005.

2. Berechne **a)** $17{,}125 + 5{,}019 + 0{,}12$, **b)** $165{,}612 + 1{,}6005 + 0{,}0012$ und erläutere das Additionsverfahren, indem du die Dezimalbrüche als Summen von Zehnerpotenzen schreibst.

3. Berechne **a)** $18{,}178 - 15{,}209$, **b)** $112{,}589 - 79{,}693$ und erläutere das Subtraktionsverfahren, indem du die Dezimalbrüche als Summen von Zehnerpotenzen schreibst.

4. Erläutere das Multiplikationsverfahren an den folgenden Beispielen, indem du die Zahlen als Summen von Zehnerpotenzen schreibst und mit diesen rechnest:

a) $5{,}275 \cdot 3$ **b)** $17{,}005 \cdot 13$
c) $204{,}109 \cdot 19$ **d)** $7{,}1 \cdot 5{,}4$
e) $5{,}8 \cdot 0{,}4$ **f)** $17{,}5 \cdot 1{,}68$
g) $0{,}03 \cdot 0{,}15$ **h)** $0{,}0005 \cdot 0{,}0012$
i) $12{,}034 \cdot 13{,}142$ **k)** $5{,}178 \cdot 1{,}001$.

5. a) Beweise die Regel, daß das Produkt zweier Dezimalbrüche soviel Stellen hinter dem Komma hat, als die beiden Faktoren zusammen haben. **b)** Läßt sich die Regel auch auf drei und mehr Faktoren ausdehnen?

6. Erläutere das Divisionsverfahren an den folgenden Beispielen, indem du die Zahlen als Summen von Zehnerpotenzen schreibst und mit diesen rechnest:

a) $7{,}1 : 5$ **b)** $2{,}84 : 8$
c) $17{,}5 : 4$ **d)** $18{,}9 : 4{,}5$
e) $1{,}251 : 3{,}6$ **f)** $175{,}77 : 0{,}72$.

Dezimalbrüche und gemeine Brüche.

7. Verwandle in gewöhnliche Brüche **a)** 0,4, **b)** 0,65, **c)** 0,725, **d)** 0,555, **e)** 3,025, **f)** 12,0625.

8. Verwandle in Dezimalbrüche: **a)** $\frac{1}{2}$, **b)** $\frac{1}{4}$, **c)** $\frac{7}{8}$, **d)** $\frac{3}{5}$, **e)** $\frac{11}{16}$, **f)** $\frac{19}{125}$.

9. Verwandle in Dezimalbrüche: **a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{6}$, **c)** $\frac{1}{7}$, **d)** $\frac{1}{9}$, **e)** $\frac{1}{11}$, **f)** $\frac{1}{12}$, **g)** $\frac{1}{13}$, **h)** $\frac{1}{37}$.

10. Verwandle in Dezimalbrüche: **a)** $\frac{7}{8}$, **b)** $\frac{6}{7}$, **c)** $\frac{13}{15}$ (Näherungswerte für die Höhe des gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge 1.)

11. Verwandle in Dezimalbrüche: **a)** $\frac{22}{7}$, **b)** $\frac{223}{71}$, **c)** $\frac{333}{106}$, **d)** $\frac{355}{113}$ (Näherungswerte für π).

12. Verwandle in gemeine Brüche die rein-periodischen Dezimalbrüche: **a)** 0,22 . . ., **b)** 0,1212 . . ., **c)** 0,0303 . . ., **d)** 0,123123 . . ., **e)** 0,142857142857 . . .

13. Verwandle in gemeine Brüche die periodischen Dezimalbrüche: **a)** 0,255 . . ., **b)** 12,4545 . . ., **c)** 124,1531531 . . ., **d)** 0,385757 . . ., **e)** 17,21512151 . . .

14. a) Stelle aus 0,33 . . . einen nicht periodischen unendlichen Dezimalbruch her, indem du zwischen die aufeinanderfolgenden Ziffern 3 nacheinander eine, zwei, drei usf. Ziffern 0 einschiebst. — Weise nach, daß der neue Dezimalbruch keine Periode hat. **b)** Stelle in ähnlicher Weise unperiodische unendliche Dezimalbrüche her. **c)** Man schaltet hinter die erste Periode eines periodischen Dezimalbruches eine 1, hinter die zweite eine 2, hinter die dritte eine 3 usf., hinter die zehnte eine 0, hinter die elfte eine 1 usf.; ist der entstandene unendliche Dezimalbruch periodisch oder unperiodisch?

Abgekürzte Addition und Subtraktion.

15. Wie groß ist der Fehler, wenn man statt zweier Zahlen $a + \alpha$ und $b + \beta$ die Näherungswerte a und b **a)** addiert, **b)** subtrahiert?

In den folgenden Aufgaben ist die größte Zahl auf **a)** vier, **b)** drei, **c)** fünf[1]) geltende Ziffern abzukürzen und von den übrigen Zahlen sind nur so viel Ziffern beizubehalten, als durch die letzte Ziffer der größten Zahl bestimmt ist:

16. 17,1718 + 14,0130 + 8,7140 + 0,14375	**17.** 566,712 + 5,8813 + 3,795 + 0,1415
18. 56770,5 + 718,66 + 3465,134 + 0,143	**19.** 713704 + 215,56 + 43140 + 5480,5
20. 957,713 — 12,5994	**21.** 1714,58 — 18,74
22. 0,785683 — 0,5372853	**23.** 577,7778 — 0,544

Abgekürzte Multiplikation.

24. a) Wie groß ist der Fehler, wenn man statt zweier Zahlen $a + \alpha$ und $b + \beta$ die Näherungswerte a und b multipliziert, unter der Voraussetzung, daß man das Fehlerprodukt $\alpha \cdot \beta$ vernachlässigen kann. Untersuche, welches der größtmöglichste Fehler bei abgekürzter Multiplikation zweier **b)** dreistelliger, **c)** vierstelliger, **d)** fünfstelliger Zahlen ist.

In den folgenden Aufgaben sind die Multiplikationen abgekürzt auf 4 Ziffern durchzuführen. Die Stellung des Kommas ist durch Überschlag festzustellen.

1) Für Schulzwecke genügt im allgemeinen drei- und vierziffriges Rechnen.

25. 38,4267 · 247,35. **26.** 461,083 · 36,4281.
27. 52,11223 · 81,324. **28.** 85,6752 · 257,8562.
29. 113,4601 · 123,5611. **30.** 3,8193 · 8,2416.

Erhebe ins Quadrat:

31. 3,1622776. **32.** 1,7320508. **33.** 5,0990195.
34. 8,0622577. **35.** 8,3666002. **36.** 8,7749644.
37. 9,9498744. **38.** 10,2474387. **39.** 21,9772611.
40. 1,6124512. **41.** 3,8078866. **42.** 0,9486833.

Erhebe in die dritte Potenz:

43. 1,58740. **44.** 2,15443. **45.** 2,28943.
46. 0,793701. **47.** 0,386403. **48.** 0,170998.
49. 1,75765. **50.** 3,78675. **51.** 8,15830

Berechne folgende Produkte:

52. 1,390907 · 2,552473 · 3,943382.
53. 7,447662 · 4,539647 · 2,987305.
54. 2,948829 · 2,166012 · 0,782816.
55. $2{,}229990 \cdot (1{,}114995^2 + 3 \cdot 0{,}847454^2)$.
56. $1{,}148505 \cdot (0{,}574252^2 + 3 \cdot 1{,}913922^2)$.
57. 3,011050 · 1,604996 · 1,079490 · 1,073436.
58. 9,240242 · 2,135349 · 1,619022 · 0,719985.
59. $7{,}950648 \cdot 1{,}075910 \cdot (0{,}562631^2 + 0{,}708350^2)$.
60. $3{,}647587 \cdot 1{,}372071 \cdot (2{,}509829^2 + 1{,}375855^2)$.
61. $(1{,}582346^2 + 1{,}667420^2)(3{,}164692^2 + 2{,}984860^2)$.

Abgekürzte Division.

62. a) Wie groß ist der Fehler, wenn man statt zweier Zahlen $a + \alpha$ und $b + \beta$ die Näherungswerte a und b dividiert unter der Voraussetzung, daß man die Fehlerprodukte $\alpha \cdot \beta$, α^2, β^2 vernachlässigen kann. Untersuche den Fehler bei abgekürzter Division zweier **b)** dreistelliger, **c)** vierstelliger, **d)** fünfstelliger Zahlen.

In den folgenden Aufgaben sind die Divisionen abgekürzt auf vier Ziffern durchzuführen. Die Stellung des Kommas ist durch Überschlag festzustellen:

63. 189,35 : 19,455076. **64.** 39,6666 . . . : 10,90871212.
65. 7,0128 : 16,7484925. **66.** 21,4285714 : 1,732050807.
67. 8,3333 . . . : 22,3606798. **68.** 0,4616161 . . . : 2,4494898.
69. 99 : 4,9749372. **70.** 18,125 : 12,04159495.
71. 11 : 4,69041576. **72.** (0,2784 : 0,452740) : 0,452740.
73. (0,007572 : 0,155857) : 0,155857.
74. (0,024333 . . . : 0,417934) : 0,417934.
75. (0,1111 . . . : 0,822071) : 0,822071.

Vermischte Aufgaben.

Die folgenden Aufgaben sind dreiziffrig abgekürzt zu rechnen:

76. Berechne **a)** den Inhalt, **b)** den Umfang eines Kreises mit dem Radius 5,13 cm ($\pi = 3{,}14159\,..$). ***c)** Die Spitze eines Propellerflügels soll normalerweise in der Stunde etwa 510 km zurücklegen? Wieviele Umdrehungen sind das in der Sekunde, wenn die Flügellänge 1,2 m ist?

77[1]. Berechne das Gewicht einer Korkkugel von 2,15 m Durchmesser. Das spezifische Gewicht ist ungefähr 0,25.

78[2]. Wie groß ist die Oberfläche der Erde? — Der Erdradius ist ungefähr 6370 km.

79. a) Berechne den Radius eines Rades, wenn eine um das Rad gelegte Schnur eine Länge von 4,27 m hat. **b)** Eine kreisförmige Radrennbahn soll angelegt werden, deren Bahnmittellinie 1 km lang ist. Wie groß ist der Radius zu wählen?

80. Welchen Weg legt ein Punkt des Erdäquators in einer Sekunde infolge der Drehung der Erde um ihre Achse zurück? — Der Erdradius ist ungefähr 6370 km.

81. Welchen Weg legt die Erde in einer Sekunde auf ihrer Bahn um die Sonne zurück? — Der Erdbahnradius ist ungefähr 149 Mill. km.

82. Das Gewicht eines Edelsteines wird zu 1,17 g festgestellt. Wieviel Karat hat der Edelstein? — In Deutschland wird 1 Karat gleich 205,894 Milligramm angesetzt.

83[1]. Für die Masse der Erde haben Richarz und Krigar-Menzel den Wert 5960 Trillionen Tonnen, Braun 5987 Trillionen Tonnen, Wilsing 6100 Trillionen Tonnen gefunden. Welcher Wert ergibt sich aus diesen drei Werten für das spezifische Gewicht der Erde? — Der Erdradius ist ungefähr 6370 km.

84. Die Masse des Mondes ist der 81,5te Teil derjenigen der Erde. Wie groß ist also die Masse des Mondes unter Verwendung der drei Angaben in Aufg. 83?

85. Die Umlaufszeiten der beiden Marsmonde sind 0,3189 Tage und 1,2642 Tage. In welchem ungefähren Verhältnis stehen diese Umlaufszeiten?

86. Die vier größten Jupitermonde haben die Umlaufszeiten:

$$u_1 = 1{,}7691 \text{ Tage},$$
$$u_2 = 3{,}5512 \quad ''$$
$$u_3 = 7{,}1545 \quad ''$$
$$u_4 = 16{,}6890 \quad ''\,.$$

In welchem ungefähren Verhältnis steht **a)** u_1 zu u_2, **b)** u_2 zu u_3, **c)** u_3 zu u_4?

87. Die Umlaufszeiten der acht älteren Saturnmonde sind:

$$u_1 = 0{,}9424 \text{ Tage}$$
$$u_2 = 1{,}3702 \quad ''$$
$$u_3 = 1{,}8878 \quad ''$$
$$u_4 = 2{,}7369 \quad ''$$
$$u_5 = 4{,}5175 \quad ''$$
$$u_6 = 15{,}9454 \quad ''$$
$$u_7 = 21{,}2673 \quad ''$$
$$u_8 = 79{,}3294 \quad ''\,.$$

1) Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
2) Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r ist $O = 4\pi r^2$.

Welche ungefähren einfachen Verhältnisse bestehen zwischen a) u_1 und u_2, b) u_1 und u_3, c) u_2 und u_4, d) u_5 und u_6, e) u_6 und u_8, f) u_6 und u_7?

88. Es ist die Summe der zweiten und der vierten Potenz von $\frac{1}{\pi}$ ungefähr gleich 1. Wie groß ist die Abweichung von diesem Wert?

Gleichungen.

89. Wie groß ist der Fehler, den man bei der Lösung einer linearen Gleichung $(a+\alpha)\cdot x+(b+\beta)=0$ begeht, wenn man an Stelle dieser Gleichung die Gleichung $ax+b=0$ löst, in der die Koeffizienten durch ihre Näherungswerte ersetzt sind?

Löse die folgenden Gleichungen ersten Grades unter Berücksichtigung von a) drei, b) vier Ziffern der Koeffizienten:

90. $6{,}745x+1{,}2961=0.$ **91.** $25{,}8043x-0{,}45463=0.$

92. $12148340x-7458=0.$ **93.** $\frac{12385}{x}-30{,}12=0.$

94. $x+y=2$
$x-y=0{,}03363.$

95. $278{,}43x+281{,}5y=371{,}9$
$188{,}54x-176{,}34y=53{,}374.$

96. Die synodische Umlaufszeit y eines inneren Planeten und seine siderische Umlaufszeit x stehen in dem folgenden Verhältnis:

$$y:x=(365{,}25+y):365{,}25.$$

a) Wie groß ist die siderische Umlaufszeit des Merkur, wenn seine synodische 115 Tage 21 Stunden ist? b) Wie groß ist die synodische Umlaufszeit der Venus, wenn die siderische 224,7 Tage beträgt?

Neuntes Kapitel.

Wurzeln.

§ 31. Das Ausziehen der Quadratwurzel.[1])

Der Algorithmus des Quadratwurzelziehens.

Die folgenden Quadratwurzeln sind zu berechnen:

1. a) $\sqrt{25}$, b) $\sqrt{81}$, c) $\sqrt{36}$ d) $\sqrt{64}$.

2. a) $\sqrt{400}$, b) $\sqrt{900}$, c) $\sqrt{4900}$, d) $\sqrt{1600}$.

3. a) $\sqrt{144}$, b) $\sqrt{441}$, c) $\sqrt{484}$, d) $\sqrt{196}$.

4. a) $\sqrt{324}$, b) $\sqrt{1225}$, c) $\sqrt{1849}$, d) $\sqrt{2209}$.

5. a) $\sqrt{4356}$, b) $\sqrt{5329}$, c) $\sqrt{7921}$, d) $\sqrt{9409}$.

6. a) $\sqrt{2{,}89}$, b) $\sqrt{7{,}84}$, c) $\sqrt{0{,}5329}$, d) $\sqrt{0{,}0729}$.

---

1) Das Zeichen $\sqrt{}$ ist nicht, wie man früher annahm, aus dem Anfangsbuchstaben r des Wortes radix = Wurzel entstanden, sondern aus einem vor die zu radizierende Zahl gesetzten Punkt, der allmählich in $\surd$ umgewandelt wurde. Erst später kam der die Klammer ersetzende wagerechte Strich hinzu.

7. a) $\sqrt{0,0361}$, b) $\sqrt{0,0025}$, c) $\sqrt{0,0081}$, d) $\sqrt{0,0009}$

8. a) $\sqrt{18225}$, b) $\sqrt{64009}$, c) $\sqrt{42849}$, d) $\sqrt{94864}$.

9. a) $\sqrt{687241}$, b) $\sqrt{499849}$, c) $\sqrt{879844}$, d) $\sqrt{826281}$.

10. a) $\sqrt{19,0969}$, b) $\sqrt{25,8064}$, c) $\sqrt{0,450241}$, d) $\sqrt{0,054756}$.

11. a) $\sqrt{1522756}$, b) $\sqrt{5527201}$, c) $\sqrt{18215824}$, d) $\sqrt{57108249}$.

12. a) $\sqrt{4149369}$, b) $\sqrt{13749264}$, c) $\sqrt{49098049}$.

13. a) $\sqrt{1227,8016}$, b) $\sqrt{1646,7364}$, c) $\sqrt{32,524209}$.

14. a) $\sqrt{0,49434961}$, b) $\sqrt{0,01703025}$, c) $\sqrt{0,00896809}$.

15. a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$, c) $\sqrt{5}$, d) $\sqrt{6}$.

16. a) $\sqrt{7}$, b) $\sqrt{8}$, c) $\sqrt{11}$, d) $\sqrt{12}$.

17. a) $\sqrt{15}$, b) $\sqrt{27}$, c) $\sqrt{38}$, d) $\sqrt{47}$.

18. a) $\sqrt{53}$, b) $\sqrt{65}$, c) $\sqrt{73}$, d) $\sqrt{95}$.

19. a) $\sqrt{25}$, b) $\sqrt{250}$, c) $\sqrt{2,5}$, d $\sqrt{0,25}$.

20. a) $\sqrt{0,36}$, b) $\sqrt{3,6}$, c) $\sqrt{360}$, d) $\sqrt{0,036}$

21. a) $\sqrt{10}$, b) $\sqrt{0,1}$, c) $\sqrt{0,01}$, d) $\sqrt{1000}$.

22. a) $\sqrt{490}$, b) $\sqrt{4,9}$, c) $\sqrt{0,49}$, d) $\sqrt{0,049}$.

23. a) $\sqrt{6,4}$, b) $\sqrt{0,64}$, c) $\sqrt{640}$, d) $\sqrt{0,064}$.

24. a) $\sqrt{810}$, b) $\sqrt{8,1}$, c) $\sqrt{0,81}$, d) $\sqrt{0,081}$.

25. a) $\sqrt{95}$, b) $\sqrt{9,5}$, c) $\sqrt{0,95}$, d) $\sqrt{0,095}$.

26. a) $\sqrt{43}$, b) $\sqrt{4,3}$, c) $\sqrt{0,43}$, d) $\sqrt{0,043}$.

27. a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, b) $\sqrt{\frac{3}{4}}$, c) $\sqrt{\frac{4}{5}}$, d) $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

28. a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$, b) $\sqrt{\frac{5}{6}}$, c) $\sqrt{\frac{8}{11}}$, d) $\sqrt{\frac{7}{9}}$.

29. a) $\sqrt{5\frac{1}{2}}$, b) $\sqrt{8\frac{1}{4}}$, c) $\sqrt{9\frac{3}{5}}$, d) $\sqrt{7\frac{3}{8}}$.

30. a) $\sqrt{4\frac{2}{3}}$, b) $\sqrt{6\frac{1}{6}}$, c) $\sqrt{13\frac{5}{11}}$, d) $\sqrt{9\frac{1}{9}}$.

31. a) $\sqrt{\frac{8}{31}}$, b) $\sqrt{\frac{31}{8}}$, c) $\sqrt{\frac{73}{13}}$, d) $\sqrt{\frac{13}{73}}$.

32. a) $\sqrt{\frac{97}{351}}$, b) $\sqrt{\frac{351}{97}}$, c) $\sqrt{\frac{901}{109}}$, d) $\sqrt{\frac{109}{901}}$.

33. a) $\sqrt{137\frac{13}{87}}$, b) $\sqrt{348\frac{371}{387}}$, c) $\sqrt{507\frac{435}{782}}$, d) $\sqrt{9084\frac{531}{971}}$.

Die Quadratwurzel aus einer Quadratwurzel ist die vierte Wurzel. Berechne die folgenden vierten Wurzeln:

34. a) $\sqrt[4]{625}$, b) $\sqrt[4]{6250}$, c) $\sqrt[4]{62,5}$, d) $\sqrt[4]{6,25}$.

35. a) $\sqrt[4]{1296}$, b) $\sqrt[4]{12960}$, c) $\sqrt[4]{129,6}$, d) $\sqrt[4]{12,96}$.

36. a) $\sqrt[4]{0,625}$, b) $\sqrt[4]{0,0625}$, c) $\sqrt[4]{1,296}$, d) $\sqrt[4]{0,1296}$.

37. a) Der Wert von $\sqrt{2}$ liegt zwischen 1,4 und 1,5. Welche Gleichung ergibt sich für α, wenn man $\sqrt{2} = 1,4 + \alpha$ setzt und α^2 vernachlässigt? Bestimme

α. Den so erhaltenen Näherungswert für $\sqrt{2}$ verbessere in gleicher Weise wie eben den Näherungswert 1,4. b—h) Berechne nach dieser Methode Näherungswerte für die in Aufgabe 15 und 16 noch genannten Quadratwurzeln.

Angewandte Aufgaben aus der Geometrie.

38. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten:

a) 5 cm und 12 cm,	b) 12 cm und 35 cm,
c) 112 cm und 15 cm,	d) 28 cm und 195 cm,
e) 44 cm und 117 cm,	f) 10 cm und 15 cm,
g) 2288 cm und 3534 cm,	h) 2914 cm und 1248 cm.

Wie groß ist die Hypotenuse?

39. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse und eine Kathete[1]):

a) 65 cm und 16 cm,	b) 1898 cm und 1702 cm,
c) 365 cm und 27 cm,	d) 514 cm und 64 cm,
e) 485 cm und 44 cm,	f) 15 cm und 9 cm,
g) 17 cm und 13 cm,	h) 6,5 cm und 6 cm.

Wie groß ist die andere Kathete?

40. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse $c = 10{,}97$ m, die eine Kathete $a = 9{,}28$ m. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks? (Berechne erst die fehlende Kathete!)

41. Der Inhalt eines Quadrates ist a) 10 qcm, b) 40 qcm, c) 90 qcm. Wie groß ist die Seite?

42. Ein Rechteck mit den Seiten a) 9 cm und 16 cm, b) 10 cm und 40 cm, c) 0,10 m und 0,30 m ist in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Wie groß ist die Seite des Quadrates?

43. Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a) 5 cm, b) 13 cm?

c) Gerbert, der spätere Papst Sylvester († 1003), findet die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, indem er die Seite mit $\frac{6}{7}$ multipliziert, Heron (um 100 v. Chr.) hat den Faktor $\frac{13}{15}$, in Elementarbüchern der Gegenwart findet sich der Wert $\frac{7}{8}$. Welcher dieser Brüche ist der beste Näherungswert und wie groß sind die Abweichungen (4 Ziffern!)[2])?

44. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes mit den Seiten a) 12 cm und 3 cm, b) 2,5 cm und 17,2 cm, c) 18,4 cm und 34,5 cm, d) 2,08 m und 8,19 m?

45. Die Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks sind $p = 48$ cm und $q = 99$ cm. Wie groß ist die kleinere Kathete?

46. Eine Sehne eines Kreises wird durch eine andere halbiert, deren Abschnitte die Längen a) 4 cm und 9 cm, b) 18 cm und 32 cm, c) 7 cm und 11 cm haben. Wie lang ist die erste Sehne?

---

1) Es sei a die Kathete, c die Hypotenuse. Dann rechnet man in vielen Fällen besser $\sqrt{(c+a)\cdot(c-a)}$ statt $\sqrt{c^2-a^2}$.

2) Vgl. § 30 Aufgabe 10.

47. Von einem Punkte ist zu einem Kreise eine Tangente und eine Sekante gezogen. Wie lang ist die Tangente, wenn die Abschnitte auf der Sekante von dem Punkte aus gemessen **a)** 2,1 cm und 2,8 cm, **b)** 4,8 cm und 5,0 cm, **c)** 13 cm und 27 cm sind?

48. Bilde das geometrische Mittel (mittlere Proportionale) von **a)** 27 und 3, **b)** 3 und 12, **c)** 4 und 36, **d)** 3 und 4, **e)** 7 und 17.

49. Die Gesichtsweite von einem sich über die Erdoberfläche erhebenden Punkte kann man ohne großen Fehler als das geometrische Mittel zwischen der Erhebung des Punktes über die Erdoberfläche und dem Erddurchmesser ansehen. Der Erdradius beträgt ungefähr 6370 km. **a)** Wie weit reicht der Blick eines Auges, das sich an Bord eines Schiffes 10 m über dem Meeresspiegel befindet? **b)** Wie groß ist die Gesichtsweite von einem Turme von 100 m, **c)** wie groß von einem Berge von 1000 m Höhe? **d)** Wie groß ist die Gesichtsweite vom Gipfel des Vesuvs (1300 m Meereshöhe), **e)** wie groß vom Gipfel des Ätna (3280 m Meereshöhe)? (Dreistellig rechnen!)

50. Die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c hat nach der Formel von Heron (um 100 v. Chr.) den Wert:

$$F = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

wo

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist. Dreiecke mit rationalen Seiten, deren Inhalt eine rationale Zahl ist, nennt man heronische Dreiecke. Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke mit den Seiten:

a) $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm;
b) $a = 92$ cm, $b = 85$ cm, $c = 39$ cm;
c) $a = 52$ cm, $b = 41$ cm, $c = 15$ cm;
d) $a = 70$ cm, $b = 65$ cm, $c = 9$ cm;
e) $a = 55$ cm, $b = 51$ cm, $c = 26$ cm.

51. Die Seiten des regelmäßigen Vierecks, Achtecks und Sechzehnecks in einem Kreise, dessen Radius die Länge Eins hat, haben der Reihe nach die Werte $\sqrt{2}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Berechne die Seiten auf 4 Ziffern.

52. Die Seiten eines regelmäßigen Dreiecks, Zwölfecks und Vierundzwanzigecks in einem Kreise, dessen Radius die Länge Eins hat, haben der Reihe nach die Werte $\sqrt{3}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Berechne die Seiten auf 4 Ziffern.

53. Die Seiten eines regelmäßigen Zehnecks, Fünfecks und Zwanzigecks in einem Kreise, dessen Radius die Länge Eins hat, haben der Reihe nach die Werte $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$, $\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$. Berechne die Seiten auf 4 Ziffern.

Reinquadratische Gleichungen.

Gib alle Wurzeln der folgenden Gleichungen an:

54. $x^2 = 16$.
55. $x^2 = 25$.
56. $x^2 = 3.61$.
57. $x^2 = 53,29$

58. $7x^2 = 0{,}9583$. 59. $5x^2 = 0{,}011045$.
60. $\frac{2}{3}x^2 = 1536$. 61. $\frac{4}{5}x^2 = 1479{,}2$.
62. $9x^2 - 36 = 5x^2$. 63. $7x^2 - 8 = 9x^2 - 10$.
64. $(7+x)^2 + (7-x)^2 = 130$. 65. $(3x-5)^2 + (3x+5)^2 = 122$.

66. Jemand löst die Gleichung $(x-3)^2 = (x-5)^2$ folgendermaßen: Ich ziehe beiderseits die Quadratwurzel. Daraus folgt $x - 3 = x - 5$ und daraus wieder $3 = 5$. a) Beweise in ähnlicher Weise, daß $a = b$ ist. b) Wo steckt der Fehler? c) Wie heißt die wirkliche Lösung der Gleichung?

67. Ein kreisförmiger Platz soll Raum für eine Million Menschen bieten; wie groß muß man den Radius wählen, wenn man auf die Person $\frac{1}{4}$ qm rechnet.

§ 32. Der allgemeine Begriff der Wurzel.

Definition der Wurzel.

1. a) Was versteht man unter $\sqrt[n]{a}$? b) Was für eine Zahl muß n in dem Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ sein? c) Wann ist $\sqrt[n]{a}$ eine ganze Zahl? d) Wann ist $\sqrt[n]{a}$ eine rationale Zahl? e) Ist eine Wurzel immer eine rationale Zahl? f) Wann ist $\sqrt[n]{a}$ keine reelle Zahl?

2. a) $\sqrt[3]{1}$, b) $\sqrt[3]{8}$, c) $\sqrt[3]{27}$, d) $\sqrt[3]{64}$.
3. a) $\sqrt[n]{1}$, b) $\sqrt[n]{0}$, c) $\sqrt[4]{81}$, d) $\sqrt[4]{16}$
4. a) $\sqrt[1]{7}$, b) $\sqrt[1]{a}$, c) $\sqrt[7]{1}$, d) $\sqrt[1]{1}$.
5. a) $\sqrt[3]{0}$, b) $\sqrt[0]{1}$, c) $\sqrt[0]{a}$, d) $\sqrt{a^0}$.
6. a) $(\sqrt[3]{8})^3$, b) $\sqrt[3]{8^3}$, c) $(\sqrt[4]{16})^4$, d) $\sqrt[4]{16^4}$.
7. a) $\sqrt[7]{a^7}$, b) $(\sqrt[3]{x})^3$, c) $\sqrt{y^2}$, d) $\sqrt{m^4}$.
8. a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$, b) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{3x}$ c) $(\sqrt{ay})^2$, d) $\sqrt{(a-y)^2}$.
9. a) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}$, b) $(\sqrt{2x-1})^2$,
c) $\sqrt[3]{(ax-b)^3}$, d) $\sqrt[4]{(x-y)^4}$.
10. a) $\sqrt{a^6}$, b) $\sqrt{b^{10}}$, c) $\sqrt{c^{14}}$, d) $\sqrt{d^{2n}}$.
11. a) $\sqrt[3]{m^3}$, b) $\sqrt[3]{n^6}$, c) $\sqrt[3]{p^{12}}$, d) $\sqrt[3]{q^{3x}}$.
12. a) $\sqrt[4]{x^4}$, b) $\sqrt[5]{y^{10}}$, c) $\sqrt[6]{u^{30}}$, d) $\sqrt[7]{v^{7x}}$.
13. a) $\sqrt[x]{a^x}$, b) $\sqrt[x]{b^{2x}}$, c) $\sqrt[x]{c^{5x}}$, d) $\sqrt[n]{d^{np}}$
14. a) $\sqrt[4]{81}$, b) $\sqrt[5]{32}$, c) $\sqrt[6]{64}$, d) $\sqrt[6]{729}$.
15. a) $3\sqrt{9}$, b) $5\sqrt{4}$, c) $2\sqrt{25}$, d) $5\sqrt{36}$.
16. a) $5\sqrt[3]{8}$, b) $3\sqrt[3]{27}$, c) $5\sqrt[3]{64}$, d) $6\sqrt[6]{64}$.
17. a) $\frac{2}{3}\sqrt{81}$, b) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$, c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}$, d) $\frac{1}{4}\sqrt[5]{32}$.
18. a) $\sqrt{\frac{1}{9}}$, b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$, c) $\sqrt{\frac{9}{16}}$, d) $\sqrt{\frac{9}{25}}$.
19. a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, b) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$, c) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$, d) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$.

20. a) $(5\sqrt{a})^2$, b) $(7\sqrt{x})^2$, c) $(a\sqrt{b})^2$, d) $(x\sqrt{x})^2$.

21. a) $(5\sqrt{2})^2$, b) $(3\sqrt{3})^2$, c) $(2\sqrt{5})^2$, d) $(10\sqrt{10})^2$.

22. a) $(a\sqrt{a})^2$, b) $(a\sqrt[3]{a})^3$, c) $(2\sqrt{5})^3$, d) $(2\sqrt[3]{5})^3$.

23. $(4\sqrt{x})^2 + (3\sqrt{x})^2 + (4\sqrt{a-b})^2 + (5\sqrt{b-x})^2$.

24. $(4\sqrt{a})^2 + (3\sqrt{b})^2 + (2\sqrt{7b-4a})^2 - (6\sqrt{b})^2$.

In den folgenden Aufgaben ist der Radikand in die Form eines Quadrates zu bringen und dann der Wert der Wurzel anzugeben:

25. $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$. **26.** $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2}$.

27. $\sqrt{a^2 - 6ab^2 + 9b^4}$. **28.** $\sqrt{a^{2m} + 2a^m x^n + x^{2n}}$.

29. $\sqrt{2 + a^2x^{-2} + a^{-2}x^2}$. **30.** $\sqrt{2 + a^{2(m-n)} + a^{2(n-m)}}$.

31. $\sqrt{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$.

32. $\sqrt{1 - 2x^3 + x^4 - 2x + 3x^2}$.

33. $\sqrt{9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25}$.

34. $\sqrt{49a^4 - 42a^3b + 37a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4}$.

35. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc}$.

Nenne alle (reellen) Wurzeln der Gleichungen:

36. $x^2 = 1$. **37.** $x^3 = 1$.

38. $x^4 = 1$. **39.** $x^5 = 1$.

40. $x^2 = 64$. **41.** $x^3 = 64$.

42. $x^6 = 64$. **43.** $x^4 = 81$.

44. $x^{2n} = 1$. **45.** $x^{2n+1} = 1$.

46. $x^2 = -1$. **47.** $x^3 = -1$.

48. $x^{2n} = -1$. **49.** $x^{2n+1} = -1$.

50. $x^3 = -27$ **51.** $x^5 = -32$.

52[1]. Jemand behauptet, es ist $a = -a$, denn wenn ich die Gleichung ins Quadrat erhebe, erhalte ich die richtige Gleichung $a^2 = a^2$. Warum ist diese Schlußweise fehlerhaft?

53. a) Untersuche, wo in dem nachfolgenden Beweise für die Gleichheit zweier beliebiger Zahlen a und b der Fehler steckt. Es sei $a + b = c$ gesetzt, dann ist

$$a = c - b$$

$$a - c = -b$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich

$$a^2 - ac = -cb + b^2.$$

Addiert man beiderseits $\frac{c^2}{4}$, so folgt

$$a^2 - ac + \frac{c^2}{4} = b^2 - cb + \frac{c^2}{4}.$$

1) Zu Aufgabe 52 und 53 vgl. auch § 31, Aufgabe 66.

Zieht man beiderseits die Wurzel, so ergibt sich

$$a - \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2}$$

oder

$$a = b.$$

b) Untersuche, wo in dem nachfolgenden Beweise für die Gleichheit zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen n und $n + 1$ der Fehler steckt. Es ist

$$n^2 - n(2n+1) = (n+1)^2 - (n+1)(2n+1),$$

denn links und rechts steht der Wert $-n^2 - n$. Addiert man beiderseits $\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, so hat man

$$n^2 - n(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 = (n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2.$$

Zieht man beiderseits die Wurzel, so ergibt sich

$$n - \frac{2n+1}{2} = n + 1 - \frac{2n+1}{2}$$

oder

$$n = n + 1.$$

Zieht man noch beiderseits n ab, so hat man einen mathematischen „Beweis“ für das Sprichwort „Einmal ist keinmal“.

Graphische Darstellungen.

54. a) Bestimme mit Hilfe der Parabel $y = x^2$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 = 2$, d. h. die Werte $\pm\sqrt{2}$. Bestimme ebenso b) $\sqrt{3}$, c) $\sqrt{5}$, d) $\sqrt{2{,}5}$, e) $\sqrt{6}$, f) $\sqrt{7}$.

55. a) Bestimme mit Hilfe der Parabel $y = x^3$ die (reelle) Wurzel der Gleichung $x^3 = 2$, d. h. den Wert $\sqrt[3]{2}$. Bestimme in gleicher Weise b) $\sqrt[3]{3}$, c) $\sqrt[3]{4}$, d) $\sqrt[3]{5}$, e) $\sqrt[3]{6}$, f) $\sqrt[3]{7}$.

56. Spiegele den Punkt mit den Koordinaten

a) 2 und 3, b) 0 und 5
c) 3 und 0, d) 4 und 4,
e) 0 und 0, f) -2 und 3,
g) 1,5 und $-0{,}7$, h) -7 und -14,

an der Geraden $y = x$ (mit anderen Worten, suche den zu dem gegebenen Punkte in bezug auf diese Gerade symmetrischen Punkt). Wie heißen die Koordinaten des Spiegelbildes?

57. Spiegele die Geraden

a) $y = x + 3$, b) $y = x - 2$,
c) $y = 2x$, d) $y = \frac{x}{3}$,
e) $x = 0$, f) $y = 0$,
g) $x = 2$, h) $y = 5$,
i) $y = 2x + 1$, k) $y = \frac{x}{4} - 1$

an der Geraden $y = x$. Wie lauten die Gleichungen der Spiegelbilder? Wie gewinnt man am einfachsten die Gleichung des Spiegelbildes aus der Gleichung der gegebenen Geraden?

58. Spiegele die Hyperbel $y = x^{-1}$ an der Geraden $y = x$. Welche Eigenschaft der Hyperbel zeigt sich in dem Ergebnis?

59. a) Spiegele die Kurve $y = x^2$ an der Geraden $y = x$. b) Wie heißt die Funktion, die durch das Spiegelbild dargestellt wird? Überzeuge dich an verschiedenen Stellen von der Übereinstimmung der rechnerisch und der graphisch gefundenen Werte, z. B. für die Werte 1, 4, 9, 2, 0,25 usf. der unabhängigen Veränderlichen in der Gleichung des Spiegelbildes.

60. Suche durch Schnitt der Kurve $y = \sqrt{x}$ mit einer Geraden Näherungswerte für die Lösungen folgender Wurzelgleichungen zu bestimmen:

a) $\sqrt{x} + x = 2$, b) $\sqrt{x} - x + 2 = 0$,
c) $\sqrt{x} + x = 12$, d) $2\sqrt{x} + x = 3$,
e) $2\sqrt{x} - x = 1$, f) $\sqrt{x} - 3x + 10 = 0$.

61. Erläutere am graphischen Bilde (Schnitt von Kurve $y = \sqrt{x}$ und Gerade), wieviel (reelle) Wurzeln die folgenden Gleichungen besitzen:

a) $\sqrt{x} = 3$, b) $\sqrt{x} = -2$,
c) $\sqrt{x} - x = 4$, d) $\sqrt{x} + x = 4$,
e) $\sqrt{x} = x$, f) $4\sqrt{x} + 8x = 3$.

62. a) Spiegele die Parabel $y = x^3$ an der Geraden $y = x$, um die Kurve $y = \sqrt[3]{x}$ zu erhalten. b) Konstruiere auf die gleiche Weise die Kurve $y = \sqrt[4]{x}$. c) Wie unterscheiden sich die Wurzelkurven mit geraden von denen mit ungeraden Exponenten? d) Welche Punkte sind allen Wurzelkurven, welche allen mit ungeradem, welche allen mit geradem Exponenten gemeinsam?

63. Gib an der Hand der graphischen Darstellung die (reellen) Wurzeln folgender Gleichungen an:

a) $\sqrt[3]{x} = \sqrt{x}$, b) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[5]{x}$,
c) $\sqrt[4]{x} = \sqrt{x}$, d) $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[5]{x}$,
e) $\sqrt[4]{x} = -\sqrt{x}$, f) $\sqrt[4]{x} = \sqrt[3]{x}$.

64. Welche Möglichkeiten bestehen für die Anzahl reeller Wurzeln bei Gleichungen der Form $a\sqrt[n]{x} + bx = c$, wenn a) der Wurzelexponent n eine gerade Zahl, b) eine ungerade Zahl ist? (Erörtere die gegenseitige Lage von Wurzelkurve und Gerade!)

65. Suche durch Schnitt einer fest gezeichneten Kurve $y = \sqrt[3]{x}$ bzw. $y = \sqrt[4]{x}$ mit einer Geraden für die folgenden Wurzelgleichungen Näherungswerte der Lösungen (Probe!):

a) $\sqrt[3]{x} = 2$, b) $\sqrt[3]{x} = -2$,
c) $\sqrt[3]{x} + x = 2$, d) $\sqrt[3]{x} - x + 6 = 0$,
e) $\sqrt[4]{x} = 2$, f) $\sqrt[4]{x} = -2$,
g) $\sqrt[4]{x} = x$, h) $4\sqrt[4]{x} - x + 8 = 0$.

§ 33. Das Rechnen mit Wurzeln.

Produkte von Wurzeln und Wurzeln aus Produkten.

1. Beweise auf Grund der Definition der Wurzel, daß

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

ist.

Die folgenden Produkte sind möglichst zu vereinfachen, ohne daß auftretende Wurzeln aus bestimmten Zahlen ausgewertet werden:

2. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$, b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$, c) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$.

3. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$, b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$, c) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{42}$.

4. a) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$, b) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}$, c) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{30}$.

5. a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$, b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$, c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50}$.

6. a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}$, b) $2\sqrt{a} \cdot \sqrt{3x}$, c) $5\sqrt{2a} \cdot 3\sqrt{5x}$.

7. a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a}$, b) $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{x}$, c) $\sqrt{y} \cdot \sqrt{8y}$.

8. a) $a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{x}$, b) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$, c) $7\sqrt{x} \cdot a\sqrt{x}$.

9. a) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a}$, b) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$, c) $\sqrt{6x} \cdot \sqrt{8x}$.

10. a) $\sqrt{6x} \cdot \sqrt{10x}$, b) $\sqrt{3y} \cdot \sqrt{6y}$, c) $\sqrt{5z} \cdot \sqrt{35z}$.

11. a) $\sqrt{7a} \cdot \sqrt{21a}$, b) $\sqrt{10b} \cdot \sqrt{15b}$, c) $\sqrt{14c} \cdot \sqrt{70c}$.

12. a) $\sqrt{d^3} \cdot \sqrt{d^3}$, b) $\sqrt{b^5} \cdot \sqrt{b^7}$, c) $\sqrt{c^7} \cdot \sqrt{7c}$.

13. a) $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p^9}$, b) $\sqrt{5q} \cdot \sqrt{q^5}$, c) $\sqrt{q^{n+1}} \cdot \sqrt{q^{n-1}}$.

14. a) $\sqrt[3]{2d^2} \cdot \sqrt[3]{4d}$, b) $\sqrt[3]{9x} \cdot \sqrt[3]{9x^2}$, c) $\sqrt[3]{25y^2} \cdot \sqrt[3]{50y^2}$.

15. a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$, b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{x}$, c) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ax}$.

In den folgenden Ausdrücken ist die Wurzel nach Möglichkeit zu vereinfachen (die Wurzel ist teilweise auszuziehen):

16. a) $\sqrt{28}$, b) $\sqrt{45}$, c) $\sqrt{18}$, d) $\sqrt{24}$.

17. a) $\sqrt{27}$, b) $\sqrt{32}$, c) $\sqrt{96}$, d) $\sqrt{243}$.

18. a) $\sqrt{320}$, b) $\sqrt{405}$, c) $\sqrt{363}$, d) $\sqrt{432}$.

19. a) $\sqrt[3]{16}$, b) $\sqrt[3]{24}$, c) $\sqrt[3]{54}$, d) $\sqrt[3]{72}$.

20. a) $\sqrt[3]{80}$, b) $\sqrt[3]{-81}$, c) $\sqrt[3]{250}$, d) $\sqrt[3]{-648}$.

21. a) $\sqrt{a^2b}$, b) $\sqrt{ax^6}$, c) $\sqrt[4]{5x^4}$, d) $\sqrt[5]{3x^5y}$.

22. a) $\sqrt{4ab^2}$, b) $\sqrt{9a^2x}$, c) $\sqrt{7x^2y^2}$, d) $\sqrt{ax^4y^2}$.

23. a) $\sqrt{5abc^2}$, b) $\sqrt{9a^4b^2c}$, c) $\sqrt{16a^2bc^4}$, d) $\sqrt{7a^2b^4x^2}$.

24. a) $\sqrt{a^2b^2}$, b) $\sqrt{(1+x)^2}$, c) $\sqrt{(1-x)^2}$, d) $\sqrt{(a+b)^2}$.

25. a) $\sqrt[3]{8ab^3}$, b) $\sqrt[3]{27a^3x}$, c) $\sqrt[3]{11x^3y^3}$, d) $\sqrt[3]{12x^6y^9}$.

26. a) $\sqrt{x^3}$, b) $\sqrt{x^7}$, c) $\sqrt{x^{2n+1}}$, d) $\sqrt{x^{2n-1}}$.
27. a) $\sqrt[3]{x^4}$, b) $\sqrt[3]{x^8}$, c) $\sqrt[3]{x^{3n+1}}$, d) $\sqrt[3]{x^{3n-2}}$.
28. a) $\sqrt[n]{x^{n+1}}$, b) $\sqrt[n]{x^{n+3}}$, c) $\sqrt[n]{5x^{2n+1}}$, d) $\sqrt[n]{ax^{2n-1}}$.
29. a) $\sqrt{ab^3c^4}$, b) $\sqrt{4a^2b^2c^3}$, c) $\sqrt{7x^4y^9z^{11}}$, d) $\sqrt{9x^3y^8z^{10}}$.
30. a) $\sqrt[3]{ab^3c^4}$, b) $\sqrt[3]{8a^5b^2c^3}$, c) $\sqrt[3]{7x^2y^9z^4}$, d) $\sqrt[3]{9x^3y^8z^{10}}$.
31. a) $2\sqrt[3]{48}$, b) $7\sqrt[3]{108}$, c) $5\sqrt[3]{-320}$, d) $8\sqrt[3]{-375}$.
32. a) $3\sqrt{8}$, b) $5\sqrt{80}$, c) $8\sqrt{75}$, d) $6\sqrt{150}$.
33. a) $3\sqrt{12a^2}$, b) $4\sqrt{20b^2}$, c) $5\sqrt{40c}$, d) $7\sqrt{48ax^2}$.
34. a) $\frac{5}{2}\sqrt{24a^3}$, b) $\frac{4}{3}\sqrt{27b^5}$, c) $\frac{5}{6}\sqrt{45c^6}$ d) $\frac{5}{8}\sqrt{80x^3y^4}$.
35. a) $1\frac{1}{4}\sqrt{72a^2}$, b) $7\frac{1}{2}\sqrt{96b^7}$, c) $3\frac{1}{3}\sqrt{54c^9}$, d) $2\frac{1}{5}\sqrt{125x^2y^3}$.

36[1]. Aus einer Wurzeltabelle entnimmt man $\sqrt{2} = 1{,}414$. Wie groß sind dann a) $\sqrt{8}$, b) $\sqrt{18}$, c) $\sqrt{32}$, d) $\sqrt{50}$?

37[1]. Aus einer Wurzeltabelle entnimmt man $\sqrt{6} = 2{,}449$ Wie groß sind dann a) $\sqrt{24}$, b) $\sqrt{54}$, c) $\sqrt{96}$?

38[1]. Aus einer Wurzeltabelle entnimmt man $\sqrt[3]{2} = 1{,}260$. Wie groß sind dann a) $\sqrt[3]{16}$, b) $\sqrt[3]{54}$, c) $\sqrt[3]{250}$?

Quotienten von Wurzeln und Wurzeln aus Quotienten.

39. Beweise auf Grund der Definition der Wurzel, daß

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

ist.

Die folgenden Quotienten sind möglichst zu vereinfachen, ohne daß auftretende Wurzeln aus bestimmten Zahlen ausgewertet werden. Wenn angängig, ist das Wurzelzeichen aus dem Nenner fortzuschaffen:

40. a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$, b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, c) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$, d) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$.
41. a) $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$, b) $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$, c) $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$, d) $\frac{\sqrt{48x}}{\sqrt{6x}}$.
42. a) $\frac{a}{\sqrt{a}}$, b) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$, c) $\frac{a}{\sqrt[4]{a}}$, d) $\frac{1}{\sqrt{a}}$.
43. a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, c) $\frac{8}{\sqrt{6}}$, d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
44. a) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$, b) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$, c) $\frac{48}{5\sqrt{32}}$, d) $\frac{54}{\sqrt{72}}$.
45. a) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$, b) $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$, c) $\frac{a}{\sqrt[9]{a^8}}$, d) $\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$.

---

1) Wie steht es mit der Genauigkeit der letzten Stelle?

46. a) $\frac{a}{\sqrt[7]{a^5}}$, b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^2}}$, c) $\frac{a}{\sqrt[8]{a^3}}$, d) $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$.

47. a) $\sqrt{ax} : \sqrt{x}$, b) $\sqrt{5x} : \sqrt{5}$, c) $\sqrt{a^2b} : \sqrt{b}$, d) $\sqrt{ab} : \sqrt{bx}$.

48. a) $\sqrt{28} : \sqrt{7}$, b) $\sqrt{32} : \sqrt{2}$, c) $\sqrt{60} : \sqrt{5}$, d) $\sqrt{72} : \sqrt{30}$.

49. a) $3\sqrt{6} : 2\sqrt{3}$, b) $5\sqrt{7} : 2\sqrt{5}$, c) $4\sqrt{5} : 5\sqrt{2}$, d) $8\sqrt{9} : 3\sqrt{2}$.

50. a) $6 : \sqrt{\frac{2}{3}}$, b) $15 : \sqrt{\frac{5}{7}}$, c) $18 : \sqrt{\frac{6}{7}}$, d) $20 : 5\sqrt{\frac{4}{5}}$.

51. a) $a : \sqrt{\frac{a}{b}}$, b) $a : \sqrt{\frac{a}{b^2}}$, c) $ax : \sqrt{\frac{a}{x}}$, d) $\frac{a}{x} : \sqrt{ax}$.

52. a) $\sqrt{\frac{4}{5}} : 2$, b) $\sqrt{\frac{8}{9}} : 6$, c) $\sqrt{\frac{25}{27}} : 10$, d) $\sqrt{\frac{5}{8}} : \frac{5}{4}$.

53. a) $\sqrt{\frac{a}{b}} : a$, b) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} : a$, c) $\sqrt{\frac{a^3}{b}} : ab$, d) $\sqrt{\frac{a}{b}} : \frac{a}{b}$.

54. a) $\sqrt{a} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, b) $\sqrt{ab} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, c) $\frac{a}{b} : \sqrt{\frac{a}{b}}$, d) $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{a}}$.

In den folgenden Ausdrücken ist der Nenner unter dem Wurzelzeichen fortzuschaffen:

55. a) $\sqrt{\frac{3}{4}}$, b) $\sqrt{\frac{5x}{9}}$, c) $8\sqrt{\frac{7a}{16x^2}}$, d) $15\sqrt{\frac{11b}{25y^2}}$.

56. a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, b) $\sqrt{\frac{1}{3}}$, c) $\sqrt{\frac{3}{5}}$, d) $\sqrt{\frac{7}{8}}$.

57. a) $\sqrt{\frac{5}{7}}$, b) $\sqrt{\frac{9}{8}}$, c) $\sqrt{\frac{5}{14}}$, d) $\sqrt{\frac{10}{27}}$.

58. a) $\sqrt{\frac{1}{2{,}8}}$, b) $\sqrt{\frac{1}{0{,}75}}$, c) $\sqrt{\frac{3}{0{,}5}}$, d) $\sqrt{\frac{4}{0{,}7}}$.

59. a) $\sqrt{\frac{5{,}4}{2{,}4}}$, b) $\sqrt{\frac{0{,}8}{3{,}6}}$, c) $\sqrt{\frac{4{,}4}{0{,}96}}$, d) $\sqrt{\frac{0{,}15}{5{,}4}}$.

60. a) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$, b) $b\sqrt{\frac{x^2}{b}}$, c) $c\sqrt{\frac{x^3}{c}}$, d) $c\sqrt[3]{\frac{x^3}{c}}$.

61. a) $\sqrt{\frac{2a^2}{3b^2}}$, b) $\sqrt{\frac{3a^2}{5x^3}}$, c) $\sqrt{\frac{5a^3}{6x^5}}$, d) $\sqrt{\frac{7a^5}{10b}}$.

62. a) $2a\sqrt{\frac{5}{8a^2}}$, b) $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{11}{12}a^3}$, c) $2ax\sqrt{\frac{17x^2}{24a}}$, d) $\frac{3}{a^2}\sqrt{\frac{13a^7}{18x}}$.

63. Aus einer Wurzeltabelle entnimmt man $\sqrt{2} = 1{,}414$. Wie groß sind dann: a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, b) $\sqrt{\frac{1}{8}}$, c) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$?

64. Aus einer Wurzeltabelle entnimmt man $\sqrt{6} = 2{,}449$. Wie groß sind dann: a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$, b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$, c) $\sqrt{\frac{3}{8}}$, d) $\sqrt{2\frac{2}{3}}$, e) $\sqrt{4\frac{1}{6}}$; f) $\sqrt{8\frac{1}{6}}$?

65. Aus einer Wurzeltabelle entnimmt man $\sqrt[3]{2} = 1{,}260$. Wie groß sind dann: a) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, b) $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$?

66. a) Beweise, daß $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$ ist und bringe in Anwendung dieser Formel b) $\sqrt{5\frac{5}{24}}$, c) $\sqrt{12\frac{12}{143}}$, d) $\sqrt{20\frac{20}{399}}$ auf eine andere Form. e) Gib andere Beispiele solcher Quadratwurzeln.

Summen von Wurzelausdrücken.

Die folgenden Polynome, deren Glieder Wurzeln enthalten, sind, soweit das möglich ist, zu vereinfachen:

67. $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$.
68. $8\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$.
69. $9\sqrt{5} - \sqrt{5}$.
70. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
71. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
72. $\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$.
73. $a\sqrt{x} - \sqrt{x}$.
74. $a\sqrt{x} - b\sqrt{x}$.
75. $a\sqrt{x} - b\sqrt[3]{x}$.
76. $8\sqrt{a} + 5\sqrt{x} - 7\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{a}$.
77. $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} + 5\sqrt{b} + 2\sqrt{a^2} - 6\sqrt{b}$.
78. $a + 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{a^2} - 3\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[6]{a^3}$.
79. $\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 2\sqrt{3x} + \sqrt{4x} - \sqrt{8x} + \sqrt{12x}$.
80. $2\sqrt{a} + 5\sqrt{b} - x\sqrt{a} - c\sqrt{b} + \sqrt{(x-1)^2 a} + \sqrt{bc^2}$.
81. $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 4\sqrt{a} - 5\sqrt{b} + \sqrt{4a} + \sqrt{9b}$.
82. $7\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3}$.
83. $5\sqrt{x} - 7\sqrt{y} + 2\sqrt{2x} + 8\sqrt{y} - \sqrt{4y} - \sqrt{8x}$.
84. $6\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{3x} - 2\sqrt{4x} + \sqrt{12x} - \sqrt{18x}$.
85. $4\sqrt{a^2x} + 3\sqrt{b^2x} + 2\sqrt{c^2x} + \sqrt{d^2x} - 2\sqrt{(b+d)^2x}$.
86. $7\sqrt{4x} + 4\sqrt{9x} + 3\sqrt{45x} - 5\sqrt{36x} - 2\sqrt{80x}$.
87. $2\sqrt{81a} - 3\sqrt{24a} + 5\sqrt{36a} + 2\sqrt{54a} - 4\sqrt{100a}$.
88. $4\sqrt{3a} - 7\sqrt{12a^2} + 5\sqrt{48a} + 6\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{75a}$.
89. $3\sqrt{8} + 4\sqrt{32} - 5\sqrt{50} - 7\sqrt{72} + 6\sqrt{98}$
90. $7\sqrt{12} - 5\sqrt{27} + 8\sqrt{48} - 6\sqrt{75} + 2\sqrt{108}$.
91. $5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{-54} - 6\sqrt[3]{-128} + 7\sqrt[3]{-250} + 2\sqrt[3]{432}$.
92. $7\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{-192} + 2\sqrt[3]{-375} - \sqrt[3]{1029}$.
93. $\sqrt{(a+b)^2x} + \sqrt{(a-b)^2x} - \sqrt{a^2x} + \sqrt{(1-a)^2x} - \sqrt{x}$.
94. $\sqrt{4+4x^2} + \sqrt{9+9x^2} + \sqrt{a^2+a^2x^2} - 5\sqrt{1+x^2}$.
95. $\sqrt{a-b} + \sqrt{16a-16b} + \sqrt{ax^2-bx^2} - \sqrt{9(a-b)}$.

In den folgenden Aufgaben ist die Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom oder mit einem zweiten Polynom auszuführen:

96. $(3\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}$.

97. $(4\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$.

98. $(2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48}) \cdot \sqrt{2}$.

99. $(5\sqrt{24} - 4\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 3\sqrt{54}) \cdot \sqrt{3}$.

100. $(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20}) \cdot 3\sqrt{2}$.

101. $(2\sqrt{20} - 7\sqrt{8} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{18}) \cdot 4\sqrt{10}$.

102. $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. 103. $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

104. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$.

105. $(5\sqrt{7} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{7} + 10\sqrt{5})$.

106. $(8 + 3\sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$. 107. $(3 - \sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})$.

108. $(5\sqrt{3} + \sqrt{6})(5\sqrt{2} - 2)$. 109. $(5 - 2\sqrt{3})(6 + 5\sqrt{3})$.

110. $(2a + 3\sqrt{x})(3a - 2\sqrt{x})$ 111. $(4\sqrt{a} - \sqrt{3x})(\sqrt{a} + 2\sqrt{3x})$.

112. $(2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2})(\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$.

113. $(2\sqrt{30} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$.

114. $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})$. 115. $(\sqrt{3a} + \sqrt{2b}) \cdot (\sqrt{3a} - \sqrt{2b})$.

116. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. 117. $(a - b\sqrt{x})^2$.

118. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$. 119. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

120. $(1 + \sqrt{2})^2$. 121. $(-1 + \sqrt{3})^2$.

122. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$. 123. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$.

124. $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})^2$. 125. $(\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b})^2$.

126. $(a + \sqrt{1-a^2})^2$. 127. $(\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax})^2$.

128. $(\sqrt{3-x} - \sqrt{2+x})^2$. 129. $(\sqrt{7-5x} + \sqrt{4x-5})^3$.

130. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$. 131. $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$.

132. $\left(\sqrt{\frac{2a}{3b}} - \sqrt{\frac{2b}{3a}}\right)^2$. 133. $\left(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} - \sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2$.

134. $(\sqrt{a+b-x} + \sqrt{a-b+x})^2$.

135. $(\sqrt{4a+b-4x} - 2\sqrt{3b-a+x})^2$.

136. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3$. 137. $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3$.

138. $(1 + \sqrt{2})^3$. 139. $(2 - \sqrt{3})^3$.

140. $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3$. 141. $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})^3$.

In den folgenden Aufgaben ist die Division eines Polynoms durch ein Monom oder durch ein zweites Polynom auszuführen:

142. $(a\sqrt{x} + \sqrt{x}) : \sqrt{x}$. 143. $(3\sqrt{a} + \sqrt{ab^2}) : \sqrt{a}$.

144. $(\sqrt{ab} + a\sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a}) : \sqrt{a}$.

145. $(2\sqrt{xy} + x\sqrt{y} + y \cdot \sqrt{x}) : \sqrt{xy}$.

146. $(x-y):(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

147. $(1-a):(1-\sqrt{a})$.

148. $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right):\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)$.

149. $\left(a\sqrt{\frac{y}{x}}-b\sqrt{\frac{x}{y}}\right):(\sqrt{ay}+\sqrt{bx})$.

150. a) $(x\sqrt{x}-y\sqrt{y}):(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, b) $(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}):(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})$,
c) $(x+1):(\sqrt[3]{x}+1)$, d) $(a-1):\sqrt[3]{a}-1)$.

Beseitigung von Wurzeln aus dem Nenner.

In den folgenden Brüchen sind die Wurzeln in den Nennern durch geeignetes Erweitern der Brüche zu beseitigen (die Nenner sind rational zu machen):

151. a) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, b) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$, c) $\frac{3}{3+\sqrt{6}}$, d) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$.

152. a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, c) $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$, d) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

153. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, c) $\frac{12}{4-\sqrt{7}}$, d) $\frac{11}{5+\sqrt{3}}$.

154. a) $\frac{13}{5+2\sqrt{3}}$, b) $\frac{14}{8-5\sqrt{2}}$, c) $\frac{12}{7-3\sqrt{5}}$, d) $\frac{5\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

155. a) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$, b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$, c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, d) $\frac{9-5\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}$.

156. a) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, b) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, c) $\frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$, d) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

157. a) $\frac{a}{a+\sqrt{a}}$, b) $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$, c) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, d) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

158. a) $\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$, b) $\frac{3+2\sqrt{x}}{5+3\sqrt{x}}$, c) $\frac{a+b\sqrt{x}}{c+d\sqrt{x}}$, d) $\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{c\sqrt{x}-d\sqrt{y}}$.

Ersetzung von Produkten und Quotienten durch einen Wurzelausdruck.

In den folgenden Aufgaben soll der vor der Wurzel stehende Faktor unter das Wurzelzeichen gebracht werden:

159. a) $a\sqrt{b}$, b) $5\sqrt{2}$, c) $2\sqrt{0{,}5}$, d) $3a\sqrt{x}$.

160. a) $ab\sqrt{c}$, b) $(a+b)\sqrt{c}$, c) $(7-a)\sqrt{x}$, d) $7a\sqrt{x}$.

161. a) $\sqrt{\frac{x}{a}}$, b) $5\sqrt{0{,}6}$, c) $7\sqrt{\frac{5}{7}}$, d) $2a\sqrt{\frac{7x}{2a}}$.

162. a) $a\sqrt[3]{b}$, b) $2\sqrt[3]{3}$, c) $5\sqrt[3]{4}$, d) $2a\sqrt[3]{5}$.

163. a) $b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, b) $2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, c) $4\sqrt[3]{\frac{3}{80}}$, d) $5\sqrt[3]{\frac{8}{75}}$.

164. a) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$, b) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^3c}{a}}$, c) $ab\sqrt{\frac{c}{ab}}$, d) $ab^2\sqrt{\frac{3c}{b^3}}$.

165. a) $\frac{ab^2}{xy^2}\sqrt{\frac{xy^3}{ab^3}}$, b) $\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2x}{a^2y}}$, c) $\frac{a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^5x}{a^9y}}$, d) $\frac{ab^n}{xy^n}\sqrt{\frac{ay^3}{b^3x}}$.

166. a) $(a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, b) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$, c) $\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^4-2a^3+a^2}{x^4+2x^3+x^2}}$.

167. a) $(a-x)\sqrt{\frac{9a+9b}{4a^2-8ax+4x^2}}$, b) $(a+b)\sqrt{\frac{ax^2-bx^2}{9a^2+18ab+9b^2}}$.

168. a) $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, b) $(\sqrt{10}+\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

169. a) $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{12+5\sqrt{6}}$.

170. a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{5-2\sqrt{6}}$, b) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

171. a) $(2-\sqrt{3})\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, b) $(3-2\sqrt{2})\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

172. a) $(-1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, b) $(a+\sqrt{b})\sqrt{c+d\sqrt{b}}$.

Potenzen von Wurzeln und Wurzeln aus Potenzen.

173. Beweise, daß

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

ist.

174. Vereinfache a) $\sqrt[3]{a^6}$, b) $\sqrt{a^8}$, c) $\sqrt[5]{a^{10}}$, d) $\sqrt[4]{a^{16}}$.

175. Vereinfache a) $\sqrt[n]{a^{2n}}$, b) $\sqrt[p]{b^{3p}}$, c) $\sqrt[x]{y^{xy+x}}$.

176. Beweise, daß

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

ist.

177. Verwandle a) $\sqrt{a}$, b) $\sqrt[3]{a}$ in eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten 6, 12, 18.

Bringe auf möglichst einfache Form:

178. a) $\sqrt[4]{36}$, b) $\sqrt[4]{25}$, c) $\sqrt[4]{49}$, d) $\sqrt[4]{64}$.

179. a) $\sqrt[6]{8}$, b) $\sqrt[6]{36}$, c) $\sqrt[6]{27}$, d) $\sqrt[6]{81}$.

180. a) $\sqrt[6]{a^2}$, b) $\sqrt[6]{a^3}$, c) $\sqrt[6]{a^4x^2}$, d) $\sqrt[4]{a^6x^6}$.

181. a) $\sqrt[9]{8}$, b) $\sqrt[9]{27}$, c) $\sqrt[9]{64}$, d) $\sqrt[9]{125}$.

182. a) $\sqrt[12]{16}$, b) $\sqrt[12]{27}$, c) $\sqrt[12]{81}$, d) $\sqrt[18]{64}$.

183. a) $\sqrt[10]{4}$, b) $\sqrt[10]{36}$, c) $\sqrt[10]{32}$, d) $\sqrt[10]{243}$.

184. a) $\sqrt[9]{a^3}$, b) $\sqrt[12]{b^8}$, c) $\sqrt[10]{c^5}$, d) $\sqrt[9]{d^{12}}$.

185. a) $\sqrt[9]{8x^6}$, b) $\sqrt[12]{a^4b^6}$, c) $\sqrt[6]{9a^2b^4}$, d) $\sqrt[8]{16a^{12}}$.

Zusammenziehung von Wurzelprodukten und Wurzelquotienten.

In den folgenden Aufgaben soll das Produkt oder der Quotient zweier Wurzeln mit verschiedenem Exponenten durch **eine** Wurzel ersetzt werden:

186. a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$, b) $\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[8]{b}$, c) $\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt{d}$, d) $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[4]{y}$.

187. a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$, b) $\sqrt{m} \cdot \sqrt[4]{m}$, c) $\sqrt{p} \cdot \sqrt[5]{q}$, d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{b}$.

188. a) $\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[6]{c}$, b) $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[8]{d}$, c) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{c}$, d) $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{y}$.

189. a) $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[9]{a}$, b) $\sqrt[8]{d} \cdot \sqrt[12]{d}$, c) $\sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[12]{y}$, d) $\sqrt[12]{p} \cdot \sqrt[16]{q}$.

190. a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$, b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, c) $\sqrt{p} \cdot \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$, d) $\sqrt{n} \cdot \sqrt[6]{\frac{p}{n}}$.

191. a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, b) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, c) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{\frac{y}{x}}$, d) $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{d}}$.

192. a) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{6}$, b) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$, c) $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$, d) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}$.

193. a) $\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$, b) $\sqrt[3]{\frac{q}{p}} \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{q}}$, c) $\sqrt[4]{\frac{q}{p}} \cdot \sqrt[6]{\frac{p}{q}}$, d) $\sqrt[6]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[9]{\frac{y}{x}}$.

194. a) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, b) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[2n]{y}$, c) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[nx]{b}$, d) $\sqrt[mx]{a} \cdot \sqrt[nx]{b}$.

195. a) $\sqrt[2n]{x} \cdot \sqrt[3n]{x}$, b) $\sqrt{y} \cdot \sqrt[2n]{y}$, c) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3n]{x}$, d) $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[6n]{d}$.

*e) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[3n]{a}$, f) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x}$.

196. a) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$, b) $\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}$, c) $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}}$, d) $\frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{10}}$.

197. a) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$, b) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{64}}$, c) $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt[4]{324}}$, d) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[4]{729}}$.

198. a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$, b) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$, c) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{16}}$, d) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$.

199. a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$, b) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}}$, c) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt[5]{c}}$, d) $\frac{\sqrt{d}}{\sqrt[6]{d}}$.

200. a) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$, b) $\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{y}}$, c) $\frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[6]{m}}$, d) $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[9]{n}}$.

201. a) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$, b) $\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{b}}$, c) $\frac{\sqrt[8]{c}}{\sqrt[12]{c}}$, d) $\frac{\sqrt[9]{d}}{\sqrt[12]{d}}$.

Wurzeln aus Wurzeln und Potenzen.

202. Beweise, daß

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

ist.

Die folgenden Wurzeln aus Wurzeln sind möglichst zu vereinfachen:

203. a) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$, b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$, c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{c}}$, d) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{d}}$.

204. a) $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$, b) $\sqrt[4]{\sqrt{y^4}}$, c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$, d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y^{10}}}$.

205. a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$, b) $\sqrt{\sqrt[3]{81}}$, c) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$, d) $\sqrt{\sqrt[8]{36}}$.

206. a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{216}}$, b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}$, c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}$, d) $\sqrt[4]{\sqrt[8]{256}}$.

207. a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$, b) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$, c) $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$, d) $\sqrt{x\sqrt[3]{y}}$.

208. a) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$, b) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$, c) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}$, d) $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{y\sqrt[p]{z}}}$.

209. a) $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a}}$, b) $\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{b}}$, c) $\sqrt[4]{c\sqrt[3]{c}}$, d) $\sqrt[4]{d\sqrt[5]{d^3}}$.

§ 34. Wurzelgleichungen, die auf lineare Gleichungen führen.

Gleichungen mit einer Unbekannten.

Löse die folgenden Gleichungen und mache jeweilig die Probe auf die Richtigkeit:

1. $\sqrt{x+4} = 3$.
2. $\sqrt{5-x} = 2$.
3. $\sqrt[3]{x+5} = 2$.
4. $\sqrt[4]{x+79} = 3$.
5. $\sqrt{x-a} = b$.
6. $\sqrt[3]{a-x} = b$.
7. $\sqrt[4]{a^4+x} = a$.
8. $\sqrt{a^5-x} = b$.
9. $2\sqrt{x} = 3$.
10. $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 5$.
11. $\frac{3}{4}\sqrt{x} = 4\frac{1}{2}$.
12. $1\frac{1}{4}\sqrt{x} = 7\frac{1}{2}$.
13. $\sqrt{3x} = 6$.
14. $\sqrt{5x} = 10$.
15. $\frac{3}{4}\sqrt{2x} = 1\frac{1}{2}$.
16. $3\frac{1}{8}\sqrt{7x} = 43\frac{3}{4}$.
17. $\sqrt{2x-3} = 7$.
18. $\sqrt{17-2x} = 3$.
19. $2\sqrt{3x-2} = 8$.
20. $7\sqrt{8x+9} = 91$.
21. $\frac{1}{2}\sqrt{x+17} = 3$.
22. $\frac{2}{3}\sqrt{99-x} = 6$.
23. $2\frac{1}{2}\sqrt{93+x} = 25$.
24. $3\frac{1}{4}\sqrt{78-7x} = 19\frac{1}{2}$.
25. $\sqrt{3x} = \sqrt{2x}$.
26. $2\sqrt{5x} = 3\sqrt{7x}$.
27. $2\sqrt{x-7} = 3\sqrt{x-17}$.
28. $3\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+8}$.
29. $7\sqrt{x-3} = 5\sqrt{2x-7}$.
30. $4\sqrt{x+7} = 3\sqrt{x+14}$.
31. $9\sqrt{x-7} = 4\sqrt{5x-31}$.
32. $2\sqrt{x+4} = 3\sqrt{x-1}$.
33. $9\sqrt{x-21} = 7\sqrt{x+11}$.
34. $4\sqrt{x+3} = 3\sqrt{x+10}$.
35. $a\sqrt{x-1} = b\sqrt{1-x}$.
36. $5\sqrt{x-a} = 8\sqrt{a-x}$.
37. $3+\sqrt{x} = 5$.
38. $\sqrt{x}-4 = 3$.
39. $7-\sqrt{x} = 4$.
40. $7-3\sqrt{x} = 1$.
41. $5\sqrt{x}-8 = 7$.
42. $19-2\sqrt{x} = 7$.
43. $8+3\sqrt{x-7} = 23$.
44. $7+5\sqrt{x-3} = 17$.

45. $13 - \sqrt{3x-5} = 8.$

46. $7 + \sqrt{19+3x} = 17.$

47. $17 - 2\sqrt{7x+1} = 1.$

48. $29 - 3\sqrt{13-2x} = 20.$

49. $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 3.$

50. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{a}{b}.$

51. $\frac{9}{7+2\sqrt{x}} = \frac{8}{13-5\sqrt{x}}.$

52. $\frac{23}{7\sqrt{x}+2} = \frac{31}{9\sqrt{x}+4}.$

53. $\frac{17-3\sqrt{x}}{11} = \frac{23-4\sqrt{x}}{15}.$

54. $\frac{29-5\sqrt{x}}{9} = \frac{39-5\sqrt{x}}{19}.$

55. $(7-\sqrt{x})\cdot(8-\sqrt{x}) = x + 11.$

56. $(3\sqrt{x}-5)\cdot(5\sqrt{x}-3) = 5(3x-31).$

57. $(3\sqrt{x}-1)^2 + (4\sqrt{x}-7)^2 = (5\sqrt{x}-6)^2.$

58. $a(\sqrt{x}-a) - b(\sqrt{x}-b) + a + b = \sqrt{x}.$

59. $\sqrt{x-3} = 3 - \sqrt{x}.$

60. $\sqrt{4x-3} = 2\sqrt{2} - 1.$

61. $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}.$

62. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-1} = 1.$

63. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9.$

64. $\sqrt{9x-17} - 3\sqrt{x-4} = 1.$

65. $\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x-3} = 17.$

66. $\sqrt{a^2-x} + \sqrt{b^2-x} = a + b.$

67. $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-6} = \sqrt{x-14} = 0.$

68. $3\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-13} = 5\sqrt{x-10}.$

69. $3\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-6} = \sqrt{x+42}.$

70. $4\sqrt{x-3} - 3\sqrt{x-8} = \sqrt{x+24}.$

71. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+14} + \sqrt{x-7}.$

72. $\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x} = \sqrt{a-b}.$

73. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}.$

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

74. $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
$x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

75. $x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = a + b$
$x + y = 2\sqrt{a}.$

Die folgenden Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten werden am besten durch Verwendung von Hilfsgrößen gelöst:

76. $4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 6$
$3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 1.$

77. $3\sqrt{x} + 13\sqrt{y} = 60$
$7\sqrt{x} + 17\sqrt{y} = 100.$

78. $2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3$
$3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5.$

79. $4\sqrt{x+7} - 5\sqrt{y-7} = 7$
$3\sqrt{x+7} - 7\sqrt{y-7} = 2.$

80. $\frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{y}} = 4$
$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 1.$

81. $\frac{8}{\sqrt{x-3}} - \frac{3}{\sqrt{y+3}} = 1$
$\frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{9}{\sqrt{y+3}} = 4.$

§ 35. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Stelle in folgenden Ausdrücken die Wurzeln als Bruchpotenzen dar:

1. a) $\sqrt[4]{a^3}$, b) $\sqrt[4]{a}$, c) $\sqrt{x}$, d) $\sqrt[3]{x^2}$.
2. a) $\sqrt{x^3}$, b) $\sqrt[4]{a^2}$, c) $\sqrt{a^n}$, d) $\sqrt[3]{a}$.
3. a) $\sqrt[3]{x+y}$, b) $\sqrt[3]{x-y}$, c) $\sqrt[3]{a^2+b^2}$, d) $\sqrt[3]{(a+b)^2}$.
4. a) $\sqrt[3]{a^2b^2}$, b) $\sqrt{9a^2+4b^2}$, c) $\sqrt[3]{(a+b)x}$, d) $\sqrt[4]{a+x^3}$.
5. a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, b) $\frac{1}{\sqrt{x+y}}$, c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, d) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$.

Stelle in folgenden Ausdrücken die Bruchpotenzen als Wurzeln dar:

6. a) $a^{\frac{1}{2}}$, b) $a^{\frac{2}{3}}$, c) $b^{\frac{3}{4}}$, d) $b^{\frac{1}{4}}$.
7. a) $c^{\frac{2}{5}}$, b) $c^{\frac{1}{5}}$, c) $x^{\frac{1}{n}}$, d) $x^{\frac{n}{2}}$.
8. a) $a^{-\frac{1}{2}}$, b) $b^{-\frac{2}{3}}$, c) $c^{1\frac{1}{2}}$, d) $c^{-2\frac{1}{2}}$.
9. a) $x^{0,5}$, b) $x^{0,2}$, c) $x^{-0,5}$, d) $x^{-0,2}$
10. a) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$, b) $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$, c) $(8x^3-y^3)^{\frac{1}{3}}$, d) $(8x^3y^3)^{\frac{2}{3}}$.

*11. a) Beweise, daß die folgenden Gesetze über die Potenzrechnung:

$$\text{I. } a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
$$\text{II. } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$
$$\text{III. } (ab)^m = a^m \cdot b^m,$$
$$\text{IV. } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$
$$\text{V. } (a^m)^n = a^{mn}.$$

auch richtig bleiben, wenn m und n Brüche sind, wenn also etwa $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$ ist. b) Gib an, mit welchen von diesen Gesetzen bei Einführung der gebrochenen Exponenten die Wurzelgesetze

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

übereinstimmen.

Multiplikation und Division.

Berechne und schreibe das Ergebnis als Bruchpotenz und als Wurzel:

12. a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$, b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$, c) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{1}{4}}$, d) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{6}}$.

13. a) $a \cdot a^{-\frac{1}{2}}$, b) $a \cdot a^{-\frac{2}{3}}$, c) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$, d) $x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x}$.

14. a) $a^0 \cdot a^{\frac{3}{4}}$ b) $a^0 \cdot a^{-\frac{3}{4}}$, c) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$, d) $x \cdot x^{-\frac{4}{3}}$.

15. a) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$, b) $b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{3}}$, c) $c^{\frac{1}{2}} : c^{\frac{1}{6}}$, d) $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{1}{12}}$.

16. a) $a : a^{-\frac{1}{2}}$, b) $a : a^{-\frac{2}{3}}$, c) $x^{\frac{1}{2}} : \sqrt{x}$, d) $x^{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{x}$.

17. a) $a^{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{a}$, b) $\sqrt{a} : a^{-\frac{1}{2}}$, c) $\sqrt[3]{x} : x^{-\frac{2}{3}}$, d) $\sqrt[4]{x} : x^{-\frac{1}{4}}$.

18. a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$. b) $a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$, c) $c^{\frac{3}{5}} : d^{\frac{2}{5}}$, d) $c^{\frac{5}{6}} \cdot d^{\frac{1}{6}}$,
e) $a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$, f) $x^{\frac{2}{7}} \cdot y^{\frac{2}{7}}$, g) $x^{\frac{2}{5}} : y^{\frac{2}{5}}$, h) $x^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{3}{4}}$.

19. a) $m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}}$, b) $m^{\frac{1}{6}} \cdot n^{\frac{1}{3}}$, c) $p^{\frac{1}{10}} \cdot q^{\frac{1}{5}}$, d) $p^{\frac{5}{6}} \cdot q^{\frac{2}{3}}$.

Potenzierung.

Berechne:

20. a) $(a^4)^{\frac{1}{2}}$, b) $(b^3)^{\frac{1}{3}}$, c) $(x^6)^{\frac{1}{3}}$, d) $(x^8)^{\frac{3}{4}}$.

21. a) $(c^9)^{\frac{2}{3}}$, b) $(c^{-3})^{\frac{1}{3}}$, c) $(x^{-\frac{2}{3}})^0$, d) $(x^0)^{-\frac{1}{2}}$.

22. a) $(a^8)^{\frac{1}{2}}$, b) $(b^{12})^{\frac{1}{3}}$, c) $(c^{16})^{\frac{1}{4}}$, d) $(d^{15})^{\frac{1}{5}}$.

23. a) $(m^{-\frac{1}{2}})^6$, b) $(n^{\frac{1}{3}})^{-6}$, c) $(p^{-\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}}$, d) $(q^{\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{3}}$.

24. a) $(-3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}} \cdot (5\frac{1}{16})^{\frac{3}{4}} \cdot (-\frac{3}{2})^{-1}$, b) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot (15\frac{5}{8})^{\frac{2}{3}} \cdot (6\frac{1}{4})^{-1}$.

Graphische Darstellung.

*25. Stelle die folgenden Funktionen graphisch dar:

a) $y = x^{\frac{2}{3}}$, b) $y = x^{\frac{3}{4}}$, c) $y = {}^{\frac{3}{2}}$, d) $y^{\frac{5}{3}}$.

§ 36. Quadratwurzeln aus negativen Zahlen.[1])

Schreibe folgende Wurzeln in einfacherer Form unter Benutzung von $i = \sqrt{-1}$:

1. a) $\sqrt{-3}$, b) $\sqrt{-17}$, c) $\sqrt{-a}$, d) $\sqrt{-ab}$.

2. a) $\sqrt{-16}$, b) $\sqrt{-25}$, c) $\sqrt{-a^2}$, d) $\sqrt{-64}$.

3. a) $\sqrt{-20}$, b) $\sqrt{-45}$, c) $\sqrt{-8}$, d) $\sqrt{-x^3}$.

4. a) $\sqrt{-a^2b^2}$, b) $\sqrt{-ab^3}$, c) $\sqrt{-ab^3}$, d) $\sqrt{-a^8b^2}$.

5. a) $5\sqrt{-12}$, b) $2\sqrt{-50}$, c) $3\sqrt{-80}$, d) $\sqrt{-4ab^2}$.

---

1) Ausführlicher wird auf Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auf der Oberstufe eingegangen.

6. Berechne die zehn ersten Potenzen von i.

Bringe die folgenden Produkte und Quotienten auf möglichst einfache Form:

7. a) $7i \cdot i$, b) $3i \cdot 5i$, c) $ai \cdot bi$, d) $a \cdot di$.

8. a) $ai \cdot bi^2$, b) $i \cdot \sqrt{-a}$, c) $i \cdot \sqrt{-4}$, d) $\sqrt{-x^2} \cdot \sqrt{-y^2}$.

9. a) $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-1}$, b) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$,
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-3}$, d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-12}$.

10. a) $\sqrt{-18} \cdot \sqrt{2}$, b) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{-ab}$,
c) $\sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{-ab^4}$, d) $\sqrt{-ab} \cdot i\sqrt{-ab}$.

11. a) $\frac{1}{i}$, b) $\frac{1}{i^2}$, c) $\frac{1}{i^3}$, d) $\frac{1}{i^5}$.

12. a) $\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7}$, b) $\frac{1}{i^8} - \frac{1}{i^6}$, c) i^{4n}, d) i^{4n-2}.

13. a) $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$, b) $\frac{ai}{\sqrt{-a}}$, c) $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}$, d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$.

Berechne die folgenden Summen und Produkte:

14. a) $(3 + 4i) + (1 + i)$, b) $(1 + i) + (1 - i)$.
15. a) $(1 + i) - (1 - i)$, b) $(1 + 2i) - (2 + i)$.
16. a) $(a + bi) + (c + di)$, b) $(a + bi) - (b + ai)$.
17. a) $(a + bi) + (a - bi)$, b) $(a + bi) - (a - bi)$.
18. a) $(3 + 2i)(3 - 2i)$, b) $(5 + 3i)(5 - 3i)$.
19. a) $(7 + 5i)(7 - 5i)$, b) $(1 + i)(1 - i)$.
20. a) $(2 + 3i)(3 - 4i)$, b) $(5 + 3i)(7 - 5i)$.
21. a) $(5 - 3i)(7 + 4i)$, b) $(6 + 5i)(7 - 6i)$.
22. a) $(x + iy)(x - iy)$, b) $(ix + y)(ix - y)$.
23. a) $(2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3})$, b) $(3 + 2i\sqrt{2})(3 - 2i\sqrt{2})$.
24. a) $(1 + i)^2$, b) $(1 - i)^2$
25. a) $(a + bi)^2$ b) $(4 + 3i)^2$.
26. a) $(5 + 3i)^2$, b) $(7 - 3i)^2$.
27. a) $(2 + 2i)^2$, b) $(3 - 3i)^2$.
28. a) $(1 + i)^3$, b) $(1 + i)^4$.
29. a) $(a + bi)^2 + (a - bi)^2$, b) $(a + bi)^3 + (a - bi)^3$.
30. a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2$, b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$.
31. a) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2$, b) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$.

32. Welche Ungleichungen bestehen, wenn die Ausdrücke
a) $\sqrt{a - b}$, b) $\sqrt{a^2 - 4b}$,
c) $\sqrt{a^2 - b^2}$ d) $\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^3}{27}}$.

reell sein sollen?

Zehntes Kapitel.

Gleichungen und ganze Funktionen zweiten Grades.

§ 37. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.[1]

Rein quadratische Gleichungen.

1. $x^2 = a$.
2. $x^2 = a^2 b$.
3. $19x^2 = 5491$.
4. $ax^2 = b$.
5. $\frac{5}{7}x^2 = 560$.
6. $\frac{ax^2}{b} = \frac{c}{d}$.
7. $17x^2 - 7 = 418$.
8. $ax^2 - b = c$.
9. $9x^2 + 4x^2 = 325$.
10. $mx^2 = a^2 - nx^2$.
11. $13x^2 - 19 = 7x^2 + 5$.
12. $ax^2 - b = cx^2 + d$.
13. $\frac{15x}{2} = \frac{810}{3x}$.
14. $\frac{2x}{3} = \frac{1050}{7x}$.
15. $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$.
16. $(3x + 1{,}5)(3x - 1{,}5) = 54$.
17. $(a + x)(b - x) + (a - x)(b + x) = 0$.
18. $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$.
19. $(7 + x)(9 - x) + (7 - x)(9 + x) = 76$.
20. $(2x + 7)(5x - 9) + (2x - 7)(5x + 9) = 1874$.
21. $\frac{a + x}{a - x} = \frac{x + b}{x - b}$.
22. $\frac{ax + b}{a + bx} = \frac{cx + d}{c + dx}$.
23. $\frac{a - x}{1 - ax} = \frac{1 - bx}{b - x}$.
24. $\frac{25 + x}{9 + x} = \frac{13 + x}{47 - x}$.
25. $\frac{35 + 3x}{1 + x} = \frac{x - 55}{3x - 53}$.
26. $\frac{x - 2}{3x + 14} = \frac{3(8 - x)}{28 - x}$.
27. $\frac{x + 5a + b}{x - 3a + b} = \frac{x - a + b}{a - x + 3b}$.
28. $\frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b}$

Gemischte quadratische Gleichungen.

29. Die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

und

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

a) Mache die Probe darauf, daß die angegebenen Werte wirklich die Gleichung befriedigen. b) Ersetze in der Gleichung a durch $-p$ und gib die beiden Wurzeln an. c) Ersetze in der Gleichung b durch $-q$ und gib die beiden Wurzeln an.

---

1) Siehe auch § 26, Aufg. 18 bis 29, 36 bis 46, § 29, Aufg. 16 bis 22 und § 31, Aufg. 54 bis 65.

30. $x^2 + 2ax = b$. 31. $x^2 - 2ax + b = 0$.
32. $x^2 + 2x = 63$. 33. $x^2 - 8x + 15 = 0$.
34. $x^2 + 6x = 91$. 35. $x^2 - 40x + 111 = 0$.
36. $x^2 + 2x = 1$. 37. $x^2 - 6x + 4 = 0$.
38. $x^2 - 2x + 2 = 0$. 39. $x^2 - 2{,}4x + 0{,}8 = 0$.
40. $x^2 + ax = b$. 41. $x^2 - ax + b = 0$.
42. $x^2 + x - 56 = 0$. 43. $x^2 - 11x + 10 = 0$.
44. $x^2 - 7x = 30$. 45. $x^2 - 17x + 60 = 0$.
46. $x^2 + x = 1$. 47. $x^2 - 7x + 11\frac{1}{2} = 0$.
48. $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$. 49. $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$.
50. $x^2 - \frac{x}{3} = 8$. 51. $x^2 + \frac{x}{7} = 50$.
52. $x^2 - 1\frac{1}{2}x = 1$. 53. $x^2 + 38\frac{2}{3} = 12\frac{7}{12}x$.
54. $ax^2 + 2bx + c = 0$. 55. $ax^2 - 2bx = c$.
56. $3x^2 - 22x + 35 = 0$. 57. $91x^2 - 2x = 45$.
58. $15x^2 + 21 = 44x$. 59. $14x^2 - 33 = 71x$.
60. $25x^2 + 2 = 30x$. 61. $15x^2 + 527 = 178x$.
62. $ax^2 - bx = c$. 63. $ax^2 + bx + c = 0$.
64. $6x^2 + x = 15$. 65. $6x^2 - 13x + 6 = 0$.
66. $7x^2 + 25x = 12$. 67. $6x^2 + 7x = 3$.
68. $6x^2 + 5x = 56$. 69. $20x^2 + x = 12$.
70. $7x^2 + 9x = 100$. 71. $3x^2 - 7x = 16$.
72. $1\frac{1}{5}x^2 + 10 = 7x$. 73. $6x^2 + 26\frac{1}{4} = 25\frac{1}{2}x$.
74. $x^2 + 6{,}51 = 5{,}2x$. 75. $x^2 + 20{,}3 = 9{,}3x$.
76. $x^2 + 4{,}3x = 27{,}3$. 77. $2x^2 + 15{,}9 = 13{,}6x$.
78. $14x^2 + 45{,}5x + 36{,}26 = 0$.
79. $7{,}82x^2 - 33{,}1x + 35 = 0$.
80. $10{,}85x^2 + 21{,}91x - 10{,}5 = 0$.
81. $x^2 - 6x + 16 = 0$. 82. $x^2 - 10x + 32 = 0$
83. $5x^2 + 13 = 14x$. 84. $3x^2 + 11 = 5x$.
85. $x^2 + ab = (a + b)x$. 86. $x^2 - ax + a = 1$.
87. $x^2 + (a - 1)x = a$. 88. $x^2 - ax + ab = b^2$.
89. $x^2 - b^2 = a(2x - a)$. 90. $x^2 + a^2 = 2ax + 1$.
91. $x^2 - 2(a + b)x + 10ab = 3(a^2 + b^2)$.
92. $x^2 - (a + b)x - 1 = a - (a + 1)b$.

Löse die folgenden Gleichungen und setze nachträglich in Gleichung und Wurzeln $n = 1, 2, 3 \ldots 10$; zeige an den Gleichungsreihen, daß der Faktor von x die negative Summe der Wurzeln, das von x freie Glied das Produkt der Wurzeln ist:

93. $x^2 - 3nx + 2n^2 = 0$. 94. $x^2 + nx - 2n^2 = 0$.
95 a). $x^2 - nx - 2n^2 = 0$, b) $x^2 - 2nx + n^2 = 0$.

Löse die folgenden Gleichungen und lasse nachträglich in Gleichung und Wurzeln a und b die Werte 1, 2, 3 annehmen:

96. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

97. $x^2 + x(b - a) - ab = 0.$

98. $x^2 + 2(a - b)x - 4ab = 0$

In den folgenden Gleichungen sind jedesmal alle vier möglichen Fälle der Vorzeichen zu berücksichtigen:

99. $x^2 \pm 13x \pm 30 = 0.$ **100.** $x^2 \pm 15x \pm 54 = 0.$

101. $x^2 \pm 17x \pm 60 = 0.$ **102.** $x^2 \pm 25x \pm 84 = 0.$

103. $x^2 \pm 20x \pm 96 = 0.$ **104.** $x^2 \pm 26x \pm 120 = 0.$

105. $x^2 \pm 29x \pm 210 = 0.$ **106.** $x^2 \pm 34x \pm 240 = 0.$

107. $x^2 \pm 39x \pm 270 = 0.$ **108.** $x^2 \pm 50x \pm 336 = 0.$

Die folgenden Gleichungen sind entweder dreiziffrig oder vierziffrig zu lösen, d. h. die Koeffizienten sind auf drei bezw. vier Ziffern abzukürzen und alle Rechnungen durch abgekürztes Multiplizieren, Dividieren und Quadratwurzelziehen auszuführen[1]):

109. $x^2 + 4{,}1853x + 4{,}37276 = 0.$

110. $x^2 - 77{,}34056x + 175{,}542 = 0.$

111. $x^2 + 0{,}51388x - 0{,}33333 = 0.$

112. $7x^2 - 8{,}0589x + 2{,}1681 = 0.$

113. $403x^2 - 574{,}165x + 124{,}683 = 0.$

114. $391x^2 - 133{,}31x - 575{,}21 = 0.$

115. $247x^2 - 243{,}59x - 2775{,}95 = 0.$

Zerlege die folgenden quadratischen Ausdrücke in Faktoren:

116. $x^2 - 5x.$ **117.** $x^2 + x.$

118. $x^2 - 7x + 12.$ **119.** $x^2 - 8x + 12.$

120. $x^2 - x - 12.$ **121.** $x^2 + x - 12.$

122. $x^2 - 8x - 20.$ **123.** $x^2 - 19x - 20.$

124. $x^2 - 10x + 24.$ **125.** $x^2 + 11x + 24.$

126. $2x^2 - 7x + 3.$ **127.** $6x^2 + x - 12.$

128. $6x^2 + x - 40.$ **129.** $6x^2 - 13x + 6.$

130. $3a^2 - 10ab + 3b^2.$ **131.** $2a^2 + ab - 3b^2.$

132. $2x^2 + 5xy + 2y^2.$ **133.** $6x^2 - 5xy - 6y^2$

134. $6 + x - x^2.$ **135.** $5x - 6 - x^2.$

136. $5 + 4x - x^2.$ **137.** $6x - 5 - x^2.$

138. $x^2 - 7x + 11.$ **139.** $x^2 - 5x - 2.$

140. $x^2 + 9x + 19.$ **141.** $x^2 + 3x - 9.$

Löse die folgenden Gleichungen durch Zerlegung des Ausdrucks auf der linken Seite der auf Null gebrachten Gleichung in Faktoren:

---

1) Vgl. § 44, Anmerkung zu Aufg. 90.

142. $x^2 = x$. **143.** $x^2 - ax = 0$.
144. $x^2 - 16x = -63$. **145.** $x^2 - 2x = 80$.
146. $x^2 + x = 90$. **147.** $x^2 - 9x = 190$.
148. $x^2 + 3x = 270$. **149.** $x^2 + x = 306$.

Gib die quadratische Gleichung an, welche die folgenden Wurzeln besitzt:

150. 5 und 6. **151.** 7 und -8.
152. 0,7 und $-0,3$. **153.** 0,1 und 1,1
154. p und q. **155.** $a + b$ und $a - b$.
156. $1 + \sqrt{3}$ und $1 - \sqrt{3}$. **157.** $2 + \sqrt{-1}$ und $2 - \sqrt{-1}$.
158. $a + b\sqrt{2}$ und $a - b\sqrt{2}$. **159.** $3a + 2b\sqrt{5}$ und $3a - 2b\sqrt{5}$.
160. $\frac{5}{4}$ und 6. **161.** $\frac{3}{5}$ und -2.
162. $3\frac{1}{3}$ und $2\frac{2}{3}$. **163.** $-4\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$.
164. $\frac{8}{3}$ und $-\frac{7}{2}$. **165.** $-\frac{4}{5}$ und $-\frac{2}{7}$.
166. $+3$ und -3 **167.** $+a$ und $-a$.
168. a und $\frac{1}{a}$ **169.** $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$.

170. a) (Vietascher Wurzelsatz.) Beweise, daß für die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ die Gleichungen gelten:

$$x_1 + x_2 = -a; \; x_1 \cdot x_2 = b.$$

b) Welche Gestalt nehmen diese Gleichungen an, wenn die vorgelegte quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lautet? **c)** Beweise, daß die Summe der reziproken Werte der Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ gleich $-\frac{a}{b}$ ist.

171. x_1 und x_2 seien die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$. Wie lautet dann die Gleichung zweiten Grades, deren Wurzeln $1 - \frac{2}{x_1}$ und $1 - \frac{2}{x_2}$ sind?

172. In der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind p und q so zu bestimmen, daß die beiden Wurzeln der Gleichung p und q sind.

Untersuche Realität und Vorzeichen der Wurzeln folgender Gleichungen, ohne die Gleichungen aufzulösen:

173. $x^2 - 4x - 21 = 0$. **174.** $x^2 - 6x + 9 = 0$.
175. $x^2 - 8x + 17 = 0$. **176.** $x^2 - 9x + 14 = 0$.
177. $x^2 - 1 = 0$. **178.** $x^2 + 1 = 0$.
179. $x^2 + 10x + 24 = 0$. **180.** $x^2 - 3x + 1 = 0$.
181. $x^2 - 5x - 7 = 0$. **182.** $x^2 + 3x - 8 = 0$.

Für welchen Wert von a haben die folgenden Gleichungen zwei gleiche Wurzeln:

183. $4x^2 + ax + 9 = 0$. **184.** $9x^2 + 6x + a = 0$.
185. $ax^2 + 4x + 1 = 0$. **186.** $x^2 + ax + b = 0$.

187. Jemand hatte sich die folgenden Gleichungen zweiten Grades nebst ihren Lösungen notiert, wobei aber die durch Punkte angedeuteten Stellen nicht mehr lesbar waren:

a) $x^2 - 4x = \ldots; \quad x_1 = 7, \quad x_2 = \ldots.$

b) $x^2 + \ldots x = 15; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \ldots.$

Ergänze die fehlenden Zahlen.

In den folgenden Ausdrücken ist a) x, b) y durch die übrigen auftretenden Größen auszudrücken:

188. $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2.$ **189.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

190. $x^2 + xy + y^2 = a.$ **191.** $(y - b)^2 = 2p(x - a).$

192. $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$

193. $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$

194. a) $\frac{x^2 + y^2}{2xy} = a;$ b) $\frac{x^2 - y^2}{2xy} = b.$

195. Wenn ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht abwärts geworfen wird, so ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg

$$s = ct + \frac{g}{2}t^2.$$

Wie drückt sich t als Funktion von s aus?

196. Sind t_1 und t_2 die Umlaufszeiten zweier Planeten, deren größte Bahndurchmesser a_1 und a_2 sind, so ist (3. Keplersches Gesetz):

$$\frac{a_1^3}{t_1^2} = \frac{a_2^3}{t_2^2}.$$

Drücke t_2 durch die anderen Größen aus.

197. In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c und dem Winkel $\alpha = 60^0$ ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

Wie groß ist a) b, wie groß b) c, ausgedrückt durch die anderen Stücke?

Bruchgleichungen.

198. $\frac{5x^2 - 72x + 448}{3x^2 + 56x - 320} = \frac{3}{5}.$ **199.** $\frac{3x^2 - 8x + 15}{7x^2 - 15x + 27} = \frac{2}{5}.$

200. $\frac{2x^3 - 3x + 10}{3x^3 + 5x^2 - 14} = \frac{2}{3}.$ **201.** $\frac{3x^3 - 7x^2 - 6}{4x^3 - 31x + 1} = \frac{3}{4}.$

202. $\frac{3x^3 - 5x^2 - 8}{x^2 + 2x - 1} = 3x - 7.$ **203.** $\frac{2x^3 - 9x^2 + 12}{x^2 - 5x + 3} = 2x - 7.$

204. $\frac{x^2 - 3x + 7}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{x + 3}{2x - 3}.$ **205.** $\frac{2x^2 - 7x + 5}{3x^2 - 7x - 8} = \frac{2x + 7}{3x + 8}.$

206. $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1} = \frac{2x - 4}{2x^2 - 6x + 5}.$

207. $\frac{x^2 - 3x - 1}{2x^3 - 5x^2 + 3x - 1} = \frac{3x - 9}{6x^2 - 15x + 7}.$

208. $\frac{4x^2 - 10x - 3}{6x^3 - 8x^2 - x + 5} = \frac{6x - 15}{9x^2 - 12x + 5}.$

209. $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2x^2 - 4x - 8}{2x^2 - 6x + 1}$.

210. $\frac{2x^2 - 4x + 5}{4x^2 - 6x - 3} = \frac{3x^2 - 6x + 5}{6x^2 - 9x - 5}$.

211. $2x + \frac{1}{x} = 3$.

212. $\frac{x}{4} - \frac{21 - x}{4 - x} = 1$.

213. $\frac{5x - 1}{9} + \frac{3x - 1}{5} = \frac{2}{x} + x - 1$.

214. $\frac{5x - 7}{9} + \frac{14}{2x - 3} = x - 1$.

215. $\frac{16 - x}{4} - \frac{2(x - 11)}{x - 6} = \frac{x - 4}{12}$.

216. $\frac{6x + 4}{5} - \frac{15 - 2x}{x - 3} = \frac{7(x - 1)}{5}$.

217. $\frac{x + 3}{9} + \frac{12}{x + 4} = \frac{x - 4}{4} + \frac{x - 2}{6}$.

218. $\frac{7}{2x - 3} + \frac{5}{x - 1} = 12$.

219. $\frac{7 - x}{11 - 2x} + \frac{4x - 5}{3x - 1} = 2$.

220. $\frac{x^3 - 10x^2 + 1}{x^2 - 6x + 9} = x - 3$.

221. $\frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 5} = \frac{x + 3}{x - 1}$.

222. $\frac{3x}{2} - \frac{3x - 20}{18 - 2x} = 2 + \frac{3x^2 - 80}{2(x - 1)}$.

223. $\frac{21}{x} - \frac{10}{x - 2} - \frac{4}{x - 3} = 0$.

224. $\frac{5 + x}{3 - x} - \frac{8 - 3x}{x} = \frac{2x}{x - 2}$.

225. $\frac{2x - 3}{x - 2} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{3x + 11}{x + 1}$.

226. $\frac{2x - 1}{x - 2} + \frac{3x + 1}{x - 3} = \frac{5x - 14}{x - 4}$.

227. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$.

228. $a + x = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$.

229. $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$.

230. $x + \frac{1}{x} = \frac{a - b}{a + b} + \frac{a + b}{a - b}$.

231. $\frac{(a - x)^2 + (x - b)^2}{(a - x)^2 - (x - b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

232. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{c}{\gamma}$.

233. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{a - b + c}{\alpha - \beta + \gamma}$.

234. $\frac{(a - x)^3 + (x - b)^3}{(a - x) - (x - b)} = \frac{a^3 - b^3}{a + b}$.

235. $\frac{(a - x)^3 + (x - b)^3}{(a - x)^2 + (x - b)^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}$.

236. $\frac{(a - x)^3 + (x - b)^3}{(a - x)^2 + (x - b)^2} = a - b$.

237. $\frac{ax + b}{bx + a} = \frac{mx - n}{nx - m}$.

Wurzelgleichungen.

238. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=\frac{x+1}{\sqrt{x+4}}$.

239. $\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-25}=\frac{8}{\sqrt{x+3}}$.

240. $\sqrt{x+15}-\sqrt{5x-77}=\frac{16}{\sqrt{x+15}}$.

241. $\sqrt{x+5}-\frac{24}{\sqrt{x+5}}+\sqrt{5x-63}=0$.

242. $\sqrt{x+12}-\frac{10}{\sqrt{x+12}}=\sqrt{5x-56}$.

243. $\sqrt{x-7}+\frac{4}{\sqrt{x-7}}=\sqrt{2x+9}$.

244. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x-5}=\frac{6}{\sqrt{x-5}}$.

245. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}$.

246. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=2\sqrt{a}$.

247. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$.

248. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2}$.

249. $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=2$.

250. $\sqrt{37+x}+\sqrt{37-x}=12$.

251. $2\sqrt{5+x}+\sqrt{9-3x}=\sqrt{41-3x}$.

252. $\sqrt{37-3x}-\sqrt{13-3x}=2\sqrt{5+x}$.

253. $\sqrt{5+x}-\sqrt{25-3x}=2\sqrt{5-x}$.

254. $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{3x+20}$.

255. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-10}=2\sqrt{x-2}$.

256. $2\sqrt{2x-6}-3\sqrt{x-10}=\sqrt{x+6}$.

257. $\sqrt{13x-30}-3\sqrt{x-2}=2\sqrt{x-3}$.

258. $\sqrt{a+4b+4x}-\sqrt{a+4b-4x}=4\sqrt{b}$.

259. $\sqrt{5x+4a-3b}+\sqrt{5x-4a-3b}=2\sqrt{x+b}$.

260. $\sqrt{14x-13a+2b}-\sqrt{6x+3a-6b}=4\sqrt{2x-a-b}$.

261. $\sqrt{a+7b-x}+2\sqrt{7a+b-x}=\sqrt{21a+3b+3x}$.

262. $\frac{\sqrt{2x+a}+\sqrt{2x-2a}}{\sqrt{2x+a}-\sqrt{2x-2a}}=\frac{3a}{2x+a}$.

263. $\sqrt{(39-x)(21+x)}-\sqrt{(39+x)(21-x)}=6$.

Lösung von Gleichungen durch Einführung von Hilfsgrößen.

Biquadratische Gleichungen.

264. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$
265. $x^4 - 21x^2 = 100.$
266. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$
267. $x^4 + 9 = 10x^2.$
268. $(x^2 - 10) \cdot (x^2 - 3) = 79.$
269. $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40.$
270. $10x^4 - 21 = x^2.$
271. $6x^4 - 35 = 11x^2.$
272. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2.$
273. $x^4 - ax^2 + b^2 = 0.$
274. $x^4 - 4(a + b)x^2 + 16(a - b)^2 = 0.$
275. $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0.$

Wurzelgleichungen.

276. $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0.$ 277. $x + 10 = 7\sqrt{x}.$
278. $x + \sqrt{x} = 30.$ 279. $x - 3\sqrt{x} = 28.$
280. $(\sqrt{x} - 5) \cdot (\sqrt{x} - 7) = 3.$ 281. $(5 - \sqrt{x})^2 = 2(7 + \sqrt{x}).$
282. $(4 - \sqrt[4]{x}) \cdot (5 - \sqrt[4]{x}) = 2(7 - \sqrt{x}).$
283. $(\sqrt[4]{x} - 3)^2 + (\sqrt[4]{x} - 2)^2 = 1.$

Bruchgleichungen.

284. $\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^2 + \frac{7}{2}\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + 3 = 0.$
285. $\frac{17}{6} \cdot \frac{a + x}{b + x} - \left(\frac{a + x}{b + x}\right)^2 = 2.$ 286. $\frac{3x - 16}{2x - 12} + \frac{2x - 12}{3x - 16} = \frac{5}{2}.$
287. $\frac{2x - 6}{3x - 4} + \frac{3x - 4}{2x - 6} = \frac{17}{4}.$
288. $\frac{x - a}{x - b} + \frac{x - b}{x - a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$
289. $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{a - b}{a + b} = \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{a + b}{a - b}.$
290. $\left(\frac{a - x}{x - b}\right)^2 = 8 \cdot \frac{a - x}{x - b} - 15.$ 291. $\frac{a + x}{b + x} + \frac{b + x}{a + x} = \frac{5}{2}.$

Gleichungen, deren eine Wurzel erkennbar ist.

292. Weise nach, daß $x^3 + ax^2 + bx + c$ durch $x - x_1$ ohne Rest teilbar ist, wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ist.

293. Welche Gestalt muß eine Gleichung **a)** ersten Grades, **b)** zweiten Grades, **c)** dritten Grades, **d)** vierten Grades haben, wenn eine ihrer Wurzeln 0 ist?

Die folgenden Gleichungen haben eine leicht erkennbare Wurzel. Bestimme die anderen Wurzeln:

294. $x^2 - 4x = 0.$ **295.** $x^2 - \frac{x}{2} = 3.$

296. $x^3 - 9x = 0.$ **297.** $x^3 - \frac{x}{4} = 0.$

298. $x^3 - 4x^2 - x = 0.$ **299.** $x^3 - 6x^2 - 16x = 0.$

300. $10x^3 + 3x = 11x^2.$ **301.** $5x^3 + 24x = 43x^2.$

302. $x^3 - 1 = 0$ **303.** $x^3 + 1 = 0.$

304. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$ **305.** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$

Reziproke Gleichungen.

306. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0.$ **307.** $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$

308. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$ **309.** $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0.$

310. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$ **311.** $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0.$

312. $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0.$

313. $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0.$

314. $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0.$

315. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$

316. $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0.$

317. $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0.$

318. $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0.$

319. $3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0.$

320. $4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0.$

321. $6x^4 - 25x^3 + 38x^2 - 25x + 6 = 0.$

322. $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0.$

323. $2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 7x - 2 = 0.$

324. $3x^5 - 7x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 7x - 3 = 0.$

325. $3x^5 - 7x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0.$

326. $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0.$

327. $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0.$

328. $6x^5 - 7x^4 - x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0.$

§ 38. Funktionsbetrachtungen.

Parabeln.

1. Verschiebe die Parabel $y = x^2$ um **a)** 4, **b)** 2, **c)** 1,5 nach oben, um **d)** 4, **e)** 2, **f)** 2,5 nach unten. Wie heißt die Funktion, die jeweilig durch die verschobene Kurve dargestellt wird?

2. Zeichne[1]) die graphischen Bilder der Funktionen

a) $y = x^2 - 1$, b) $y = x^2 + 1$,

c) $y = x^2 - 2\frac{1}{2}$, d) $y = x^2 + 2{,}25$

und gib jeweilig die Nullstellen der Funktion an, soweit sie vorhanden sind.

3. Verschiebe die Parabel $y = x^2$ um a) 2, b) 5, c) $2\frac{1}{2}$ nach rechts, um d) 4, e) 10, f) 0,5 nach links. Wie heißt die Funktion, die jeweilig durch die Kurve dargestellt wird?

4. Zeichne die graphischen Bilder der Funktionen:

a) $y = (x - 3)^2$, b) $y = (x + 1)^2$,

c) $y = (x - 0{,}3)^2$, d) $y = x^2 - 4x + 4$,

e) $y = x^2 + 10x + 25$, f) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

und gib jeweilig die Nullstellen der Funktion an.

5. Verschiebe die Parabel $y = x^2$ um

a) 2 nach oben, 4 nach rechts, b) 1 nach unten, 2 nach links,

c) 4 nach unten, 3 nach rechts, d) 9 nach unten, 5 nach links,

e) 2,25 nach unten, 1 nach rechts, f) 2 nach unten, 1 nach links,

g) m nach unten, n nach rechts.

Gib in jedem Falle die Nullstellen der neuen Kurve, soweit sie vorhanden sind, sowohl nach dem graphischen Bilde als durch Rechnung an.

6. Berechne für die folgenden Funktionen zweiten Grades die Verschiebungen nach oben bzw. unten und nach rechts bzw. links, die man mit der Parabel $y = x^2$ vornehmen muß:

a) $y = (x - 2)^2 + 3$, b) $y = (x + 4)^2 - 8$,

c) $y = x^2 - 8x + 7$, d) $y = x^2 + 8x + 7$,

e) $y = x^2 + 4x - 12$, f) $y = x^2 - 4x - 12$,

g) $y = x^2 + ax + b$.

7. Eine ganze Funktion zweiten Grades $y = x^2 + ax + b$ habe nur eine Nullstelle, d. h. die sie darstellende Parabel zweiten Grades berühre die x-Achse. Die Nullstelle sei a) $+1$, b) -1, c) $-1\frac{1}{2}$, d) m. Wie heißen die Koeffizienten a und b der Funktion?

8. Eine ganze Funktion zweiten Grades $y = x^2 + ax + b$ habe als eine Nullstelle den Nullpunkt. Die andere Nullstelle sei a) 2, b) 4, c) $-1{,}25$, d) 0, e) m. Berechne in jedem Falle die Lage des Scheitelpunktes und gib an, wie die Koeffizienten a und b der Funktion heißen.

9. Eine ganze Funktion zweiten Grades $y = x^2 + ax + b$ hat die Nullstellen:

a) -1 und $+1$, b) -5 und $+5$,

c) $+2$ und $+4$, d) -2 und -4,

---

1) Man benutzt dazu am besten eine Schablone, d. h. eine möglichst genau auf starkes Papier (oder Blech!) gezeichnete Parabel $y = x^2$, die man ausgeschnitten hat.

e) -2 und $+3$, f) $+4$ und -1,
g) m und $-m$, h) m und n.

Berechne in jedem Falle die Lage des Scheitelpunktes und gib an, wie die Funktion heißt.

10. Konstruiere das graphische Bild der Funktion $y = x^2 + ax + b$ durch Addition der Funktionen $y_1 = x^2$ und $y_2 = ax + b$ für die Werte:

a) $a = 0, \quad b = 3$, b) $a = 0, \quad b = -2$,
c) $a = 1, \quad b = 0$, d) $a = -2, \quad b = 0$,
e) $a = 1, \quad b = -12$, f) $a = -3, \quad b = 10$,
g) $a = -4, \quad b = 5$.

11. Unter welchen Bedingungen fallen die folgenden Parabeln zusammen:

a) $y = x^2 + a$ und $y = x^2 + b$,
b) $y = ax^2 + b$ und $y = cx^2 + d$,
c) $y = x^2 + ax$ und $y = x^2 + bx$,
d) $y = ax^2 + bx$ und $y = cx^2 + dx$,
e) $y = x^2 + ax + b$ und $y = x^2 + cx + d$,
f) $y = ax^2 + bx + c$ und $y = dx^2 + ex + f$?

12. Bestimme in der Funktion $y = x^2 + ax + b$ die Koeffizienten a und b so, daß man hat:

a) $y = 1$ für $x = 0$
$y = 3$ für $x = 1$,
b) $y = 1$ für $x = -1$
$y = 5$ für $x = +1$,
c) $y = 2$ für $x = 0$
$y = 4$ für $x = 2$.

13. Bestimme in der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ die Koeffizienten a, b und c so, daß man hat:

a) $y = 1$ für $x = 0$
$y = 3$ für $x = 1$
$y = 6$ für $x = 2$,
b) $y = 1$ für $x = 0$
$y = 1$ für $x = 1$
$y = 5$ für $x = -1$,
c) $y = 17$ für $x = 1$
$y = 39$ für $x = 2$
$y = 11$ für $x = -2$.

Hyperbel.

14. Verschiebe die Hyperbel $y = \frac{6}{x}$ um a) 4, b) 2, c) 1,5 nach oben, um d) 4, e) 2, f) 2,5 nach unten. Wie heißt die Funktion, die jeweilig durch die verschobene Kurve dargestellt wird?

15. Zeichne[1]) die graphischen Bilder der Funktionen:

a) $y = \frac{6}{x} - 1$, b) $y = \frac{6}{x} + 2$,

c) $y = \frac{6 - 2x}{x}$, d) $y = \frac{3x + 6}{x}$.

16. Verschiebe die Hyperbel $y = \frac{6}{x}$ um a) 2, b) 5, c) $2\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{3}$ nach rechts, um e) 4, f) 10, g) $\frac{2}{3}$, h) $1\frac{3}{4}$ nach links. Wie heißt die Funktion, die jeweilig durch die verschobene Kurve dargestellt wird?

17. Zeichne die graphischen Bilder der Funktion

a) $y = \frac{6}{x - 3}$, b) $y = \frac{6}{x + 1}$,

c) $y = \frac{6}{x - \frac{1}{3}}$, d) $y = \frac{12}{2x - 1}$,

e) $y = \frac{18}{3x + 2}$, f) $y = \frac{48}{8x - 9}$.

Wieviel beträgt die Verschiebung der Hyperbel in jedem Falle? Wo liegt die Unendlichkeitsstelle?

18. Verschiebe die Hyperbel $y = \frac{6}{x}$ um

a) 2 nach oben, 4 nach rechts, b) 1 nach unten, 2 nach links,

c) 4 nach unten, 3 nach rechts, d) $\frac{1}{2}$ nach unten, 3 nach links,

e) 2 nach unten, $\frac{4}{5}$ nach rechts, f) $\frac{2}{3}$ nach oben, $\frac{3}{4}$ nach rechts.

Gib in jedem Falle die Unendlichkeitsstellen und, soweit vorhanden, die Nullstellen an.

19. Verschiebe die Hyperbel $y = \frac{a}{x}$ a) um m nach oben, b) um n nach rechts, c) um m nach oben und um p nach rechts, d) um $\frac{p}{q}$ nach oben und um $\frac{r}{s}$ nach rechts. Gib in jedem Falle die neue Gleichung der Kurve an, die Unendlichkeitsstelle und die Nullstelle.

20. Berechne für die folgenden rational gebrochenen Funktionen ersten Grades die Verschiebungen nach oben bzw. unten und nach rechts bzw. links, die man mit der Hyperbel $y = \frac{a}{x}$ vornehmen muß:

a) $y = \frac{a}{x - 3} + 2$, b) $y = \frac{a}{x - n} + m$,

c) $y = \frac{x + a + 2}{x + 2}$, d) $y = \frac{mx + a - mn}{x - n}$,

e) $y = \frac{ax + b}{x - c}$, f) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

---

1) Man benutzt dazu am besten eine Schablone, d. h. eine auf starkes Papier möglichst genau gezeichnete Hyperbel $\left[\text{hier die Hyperbel } y = \frac{6}{x}\right]$, die man ausschneidet. Es genügt natürlich ein Hyperbelast.

g) $y = 3 - \frac{1}{x-2}$, h) $y = \frac{4x-5}{x}$,

i) $y = \frac{x-1}{x+1}$, k) $y = \frac{x+2}{x-2}$,

l) $y = \frac{x+5}{2x}$, m) $y = \frac{2x-3}{3x-4}$.

Gib in jedem Falle die Nullstellen an.

21. Eine Hyperbel $y = \frac{x+m}{x+n}$ hat folgende Nullstellen und Unendlichkeitsstellen:

	0	∞
a)	2	5
b)	-2	3
c)	$\frac{1}{2}$	3
d)	1	$\frac{4}{3}$
e)	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$

Zeichne die Kurve. Wo liegt der Mittelpunkt der Hyperbel?

22. Unter welchen Bedingungen fallen die folgenden Hyperbeln zusammen:

a) $y = \frac{a}{x+b}$ und $y = \frac{c}{x+d}$,

b) $y = \frac{ax+b}{x}$ und $y = \frac{cx+d}{x}$,

c) $y = \frac{x+a}{bx+c}$ und $y = \frac{x+d}{ex+f}$,

d) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ und $y = \frac{ex+f}{gx+h}$?

Partialbrüche.

Zerlege die folgenden Funktionen in Partialbrüche der Form $\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$ und stelle sie durch Addition der Teilfunktionen graphisch dar:

23. $y = \frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}$. 24. $y = \frac{2}{x^2-1}$.

25. $y = \frac{1}{x(x-1)}$. 26. $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

27. $y = \frac{4+x}{2x-x^2}$. 28. $y = \frac{3}{3x-2x^2}$.

29. $y = \frac{5x}{(2-x)(3+x)}$. 30. $y = \frac{1+x}{1-4x+3x^2}$.

31. $y = \frac{a-b}{(x-a)\cdot(x-b)}$. 32. $y = \frac{ax+b}{(x+a)(x+b)}$.

§ 39. Eingekleidete Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Vorübungen.

1. Das Produkt aus dem vierten und dem fünften Teil einer Zahl gibt 500 Wie heißt die Zahl?

2. Das Produkt aus dem dritten Teil einer Zahl und aus ihrem Fünffachen liefert 540. Wie heißt die Zahl?

3. Wenn man die Summe und die Differenz einer gewissen Zahl und der Zahl 1 bildet, so ist das Produkt aus der Summe und der Differenz gleich 360. Wie heißt die Zahl?

4. Wenn man die Summe und die Differenz einer gewissen Zahl und der Zahl 7 bildet, so ist die Summe der Quadrate der so erhaltenen Zahlen gleich 1066. Wie heißt die Zahl?

5. Es gibt zwei Zahlen, von denen die eine ebensoviel über 100 beträgt, als die andere darunter, ihr Produkt ist 9831. Wie heißen die Zahlen?

6. Es gibt zwei Zahlen, von denen die eine ebensoviel über 58 beträgt, als die andere darunter, während die Summe ihrer Quadrate 6970 ist. Wie heißen die Zahlen?

7. Die Summe der Quadratwurzeln aus zwei Zahlen, von denen die eine um ebensoviel über 37 überschießt, als der anderen an 37 fehlt, ist gleich der Quadratwurzel aus 74. Wie heißen die Zahlen?

8. Wie wird das Resultat der vorigen Aufgabe sein, wenn statt 37 die Zahl 58 gegeben und die Summe der Wurzeln gleich 14 ist?

9. Es soll eine Zahl gesucht werden, deren 29faches das Quadrat derselben um 190 übertrifft.

10. Es gibt eine Zahl, deren 10faches um 999 kleiner ist als ihr Quadrat. Wie heißt sie?

11. Zerlege 53 in zwei Summanden, deren Produkt 612 ist.

12. Zerlege die Größe $a^2 + b^2$ in zwei Summanden, deren Produkt $\frac{1}{4}(a^4 + a^2b^2 + b^4)$ ist.

13. Zerlege 384 in zwei Faktoren, deren Differenz 8 ist.

14. Zerlege 2268 in zwei Faktoren, deren Summe 99 ist.

15. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, die sich um 12 unterscheiden, beträgt 1130. Wie heißen die Zahlen?

16. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produkts $24 \cdot 20$ vergrößern, damit das Produkt um 540 größer wird?

17. Suche zwei Zahlen, deren Produkt 900 und deren Quotient 4 ist.

18. Zwei Zahlen verhalten sich wie $5:4$. Vermehrt man jede um 15, so beträgt die Differenz der Quadrate der neuen Zahlen 999. Wie heißen die Zahlen?

19. Dividiert man $4\frac{1}{2}$ durch eine Zahl, so erhält man ebensoviel, als wenn man diese Zahl von $4\frac{1}{2}$ subtrahiert. Wie heißt die Zahl?

20. Welche Zahl gibt durch 5 dividiert 1 mehr, als wenn man 360 durch sie dividiert?

21. Zerlege 900 so in zwei Summanden, daß die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Werte von 221 ist.

22. Das Produkt zweier Zahlen, vermehrt um ihre Summe, gibt 999. Wie groß ist jede der beiden Zahlen, wenn die erste die zweite um 15 übertrifft?

23. Der Nenner eines Bruches ist um 4 größer als der Zähler. Vermindert man den Zähler um 3 und vermehrt den Nenner um die gleiche Zahl, so ist der entstehende Bruch nur halb so groß als der ursprüngliche. Wie heißt der Bruch?

24. Zähler und Nenner eines Bruches betragen zusammen 100. Wäre der Zähler um 18 größer und der Nenner um 16 kleiner, so würde der Wert des Bruches doppelt so groß sein als der des ursprünglichen. Wie heißt der ursprüngliche Bruch?

25. Es gibt eine Zahl zwischen 50 und 10 mit der folgenden Eigenschaft: Die Unterschiede der Zahl mit den genannten verhalten sich wie die Summen der Zahl mit den Zahlen 94 und 10. Wie heißt die Zahl?

26. Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, von denen die erste um 3 größer ist als die zweite. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Quersumme, so erhält man 814. Wie heißt die Zahl?

27. Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Summe 10 ist. Stellt man die Ziffern um und multipliziert die so erhaltene Zahl mit der ursprünglichen, so erhält man 2944. Wie heißt die Zahl?

28. Die Summe zweier Zahlen beträgt 200. Die Quadratwurzel aus der ersten, vermehrt um die zweite Zahl, gibt 44. Wie heißen die Zahlen?

29. Die Summe zweier Zahlen ist 290, die Summe ihrer Quadratwurzeln 24. Wie heißen die Zahlen?

30. Die Summe zweier Zahlen ist 40, die Summe ihrer Kuben 17080. Wie heißen die Zahlen?

31. Die Differenz zweier Zahlen ist 10, die Differenz ihrer Kuben 20530. Wie heißen die Zahlen?

32. Die Summe zweier Zahlen ist 7110, die Summe ihrer Kubikwurzeln beträgt 30. Wie heißen die Zahlen?

33. Welche drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen haben die Eigenschaft, daß ihr Produkt gleich ihrer Summe ist?[1])

34. **a)** Berechne den Ausdruck $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$. Setze insbesondere **b)** $a=2$, **c)** $a=3$, **d)** $a=5$.

Aufgaben aus der Planimetrie.

Quadrat und Rechteck.

35. Wie groß ist die Diagonale eines Quadrates, dessen Umfang **a)** 100 cm, **b)** a ist? Die Diagonale eines Quadrates ist **c)** 100 cm, **d)** a; wie groß ist die Seite des Quadrates?

36. **a)** Der Radius eines Kreises ist 3 cm. Wie groß ist die Seite des einbeschriebenen Quadrates? **b)** Der Umfang des einem Kreise einbeschriebenen Quadrates ist 20 cm. Wie groß ist der Durchmesser des Kreises?

37. Die Seite des einem Kreise einbeschriebenen Quadrates ist 20 cm. Wie groß ist die Seite des um den Kreis beschriebenen Quadrates?

38. In einem Quadrat ist die Diagonale 5 cm länger als die Seite. Wie groß ist die Seite?

---

1) Am bequemsten ist es, die mittlere der drei Zahlen mit x zu bezeichnen.

39. In einem Quadrat sind eine Seite und eine Diagonale zusammen 10 cm lang. Wie groß ist der Inhalt des Quadrats?

40. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, wenn die Seite des eingeschriebenen Quadrats um 1 m länger ist als der Radius?

41. Ein Quadrat wird auf das 4fache seines Inhalts vergrößert dadurch, daß die Seite um **a)** 3 cm, **b)** a verlängert wird. Wie groß war die Seite des Quadrates ursprünglich?

42. Die Umfänge zweier Quadrate sind zusammen **a)** 40 cm, **b)** a, die Inhalte **a)** 58 qcm, **b)** b. Wie groß sind die Seiten der beiden Quadrate?

43. Einem Quadrat ist ein gleichseitiges Dreieck in der Weise einbeschrieben, daß beide eine Ecke gemeinsam haben und daß die zwei anderen Ecken des Dreiecks auf den Seiten des Quadrats liegen. **a)** Wie groß ist die Seite des gleichseitigen Dreiecks, wenn die Seite des Quadrates a ist? **b)** Wie groß ist die Quadratseite, wenn die Seite des gleichseitigen Dreiecks b ist?

44. Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie 12 : 5. Wie lang sind sie, wenn die Diagonale 29,9 cm mißt?

45. Der Inhalt eines Rechtecks ist 1440 qm. Wie groß sind seine Seiten, wenn die eine 18 m länger ist als die andere?

46. Von den Seiten eines Rechtecks ist die eine um 19 m länger als die andere. Wäre die kleinere um den vierten Teil größer und die größere um den dritten Teil kleiner, so würde der Inhalt des ganzen Rechtecks um 1320 qm kleiner sein. Wie groß sind die Seiten?

47. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 252 m, sein Inhalt 3888 qm. Wie groß sind die Seiten?

48. Der Inhalt eines Rechtecks, dessen lange Seite 99 m größer ist als die kurze, ändert sich nicht, wenn man die lange Seite auf die Länge von 972 m bringt und die kurze Seite um 133 m verkleinert. Wie groß ist der Inhalt und wie lang sind die Seiten?

49. Aus einem Rechteck, dessen Seiten 50 m und 48 m lang sind, ist gleichmäßig um den Mittelpunkt ein so großes Rechteck ausgeschnitten, daß ein überall gleichbreiter Rahmen übrig bleibt, dessen Fläche 19mal so groß ist als das ausgeschnittene Stück. Wie breit ist der Rahmen und wie groß ist sein Inhalt?

50. Um ein Blumenbeet, das die Form eines Rechtecks mit den Seiten 3 m und 4 m hat, soll ein überall gleich breiter Rasenstreifen angelegt werden, dessen Fläche 10mal so groß als die des Blumenbeetes sein soll. Wie breit muß er sein?

Dreieck.

51. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4. Wie lang sind sie, wenn die Hypotenuse 555 m mißt?

52. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 216 qm, die beiden Katheten sind zusammen 42 m lang. Wie groß sind die Katheten?

53. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist a, die zugehörige Höhe h. Wie groß sind die Hypotenusenabschnitte? Beispiel: $a = 34$ cm, $h = 15$ cm.

54. Die beiden Diagonalen eines Rhombus, dessen Seiten $6\frac{1}{2}$ cm lang sind, haben zusammen die Länge 17 cm. Wie lang sind sie?

55. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Grundlinie 2 cm länger als die zugehörige Höhe. Der Umfang beträgt 16 cm. Wie groß sind die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks?

56. Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen 49 m, 36 m, 51 m. Wie lang ist die Halbierungslinie des Gegenwinkels der dritten Seite?

57. Wie lang ist die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels, dessen Gegenseite 78 m beträgt, während die ihn einschließenden Seiten Längen von 81 m und 49 m haben?

58. Wie lang ist im Dreieck mit den Seiten a) $a = 15$ m, $b = 13$ m, $c = 14$ m; b) $a = 39$ m, $b = 41$ m, $c = 50$ m die zur Seite c gehörige Mittellinie?

Vielecke.

59. Wieviel Ecken hat ein Vieleck, das a) 54, b) 20, c) n Diagonalen besitzt?

60. Welches Vieleck hat 12 Diagonalen mehr als Seiten?

Kreis.

61. Wenn man den Durchmesser eines Kreises um 3 cm vergrößert, so wird der Inhalt des Kreises verdoppelt. Wie groß war der Durchmesser des Kreises?

62. Der Inhalt eines Kreisringes, bei dem der Radius des äußeren Kreises doppelt so groß wie der Radius des inneren ist, soll 100 qcm werden. Wie groß hat man den Radius des äußeren Kreises zu wählen?

63. Eine Sehne ist a) 10 cm, b) a cm vom Mittelpunkt des Kreises entfernt und a) 4 cm, b) b cm größer als der Radius. Wie groß ist die Sehne?

64. Von einem Punkte, der 8 cm vom Mittelpunkte eines Kreises entfernt ist, ist eine Tangente an den Kreis gelegt. a) Wie groß ist die Tangente, wenn der Radius des Kreises 1 cm, b) a cm ist? c) Wie groß ist der Radius des Kreises, wenn die Tangente a) 6 cm, b) b cm ist?

65. Eine Tangente und eine Sekante eines Kreises schneiden sich. Die Tangente ist vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt 32 cm lang, das Stück der Sekante zwischen den zwei Schnittpunkten mit dem Kreise (die Sehne) ist 4,8 cm. Wie lang ist die Sekante?

66. Es ist eine Strecke von a) 1 m, b) 17 cm, c) a m nach dem goldenen Schnitt zu teilen. Wie groß ist der größere, wie groß der kleinere Abschnitt?

67. In einem regelmäßigen Zehneck ist die Seite gleich dem größeren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius des umbeschriebenen Kreises. Wie groß ist der Radius, wenn die Zehneckseite 5 cm beträgt?

Aufgaben aus der Stereometrie.

Würfel und Quader.

68. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie 3 : 4 : 5. Die Oberfläche beträgt 282 qcm. Wie groß sind die Kanten?

69. a) Ein Quader hat Kanten von 3 m, 4 m und 12 m Länge. Wie lang ist seine Raumdiagonale? b) Wie lang ist die Raumdiagonale eines Quaders, wenn die Kanten 21 cm, 16 cm und 12 cm lang sind?

70. Die Grundfläche eines Quaders ist 12 m lang, 9 m breit, die Raumdiagonale ist 17 m lang. Wie groß ist die Höhe des Quaders?

71. Die Grundfläche eines Quaders ist 12 cm lang, 16 cm breit, die Raumdiagonale mißt 29 cm. Wie groß ist die Höhe des Quaders?

72. Zwei Würfel haben zusammen einen Kubikinhalt von 9990 ccm. Wie lang sind die beiden Kanten, wenn ihre Summe 30 cm beträgt?

73. Die Differenz der Rauminhalte zweier Würfel beträgt 9970 cmm. Wie groß sind die Inhalte, wenn die Differenz der beiden Würfelkanten 10 mm beträgt?

Zylinder und Kegel.

74. Welche Dicke muß ein Kupferdraht haben, wenn 5 m dieses Drahtes 26 g wiegen dürfen? (Spezifisches Gewicht des Kupfers 8,8.)

75. Berechne den Halbmesser und die Höhe eines senkrechten Zylinders von 1,412 l Inhalt, **a)** wenn der Achsenschnitt ein Quadrat ist, **b)** wenn die Seiten des Achsenschnittes sich wie 4 : 1 verhalten.

76. Die Höhe eines geraden Zylinders ist um 3 cm größer als der Durchmesser der Grundfläche. Wie groß ist sein Inhalt, wenn der Mantel 28π qcm beträgt?

77. Der Durchmesser eines geraden Zylinders ist um 5 cm kleiner als die Höhe. Wie groß ist sein Inhalt, wenn die Oberfläche 84π qcm beträgt?

78. Die Seitenlinie eines Kegels mißt 5 cm, die Oberfläche 36π qcm. Wie groß ist der Inhalt?

79. In einem geraden Kegel verhält sich die Höhe zum Durchmesser des Grundkreises wie 2 : 3. Wie groß ist die Höhe und der Durchmesser, wenn die Gesamtoberfläche des Kegels 24π qcm ist?

80. Die Gesamtoberfläche eines geraden Kegels von 8 cm Höhe beträgt 96π qcm. Wie groß ist der Grundkreisradius?

Tetraeder und Oktaeder.

81. Die Kante eines Tetraeders ist **a)** 5 cm, **b)** a cm. Wie groß ist die Oberfläche?

82. Die Oberfläche eines Tetraeders ist **a)** 100 qcm, **b)** a qcm. Wie groß ist die Kante?

83. Die Kante eines Oktaeders ist **a)** 5 cm, **b)** a cm. Wie groß ist die Oberfläche?

84. Die Oberfläche eines Oktaeders ist **a)** 100 qcm, **b)** a qcm. Wie groß ist die Kante?

85. Ein Tetraeder und ein Oktaeder haben gleiche Oberfläche. Wie verhalten sich die Kanten?

86. Ein Oktaeder und ein Würfel haben gleiche Oberflächen. Wie verhalten sich die Kanten?

Aufgaben aus der Physik.[1]

Mechanik.[2]

87. Ein Stein fällt (mit der Anfangsgeschwindigkeit Null) in einen 87 m tiefen Brunnen. **a)** Nach welcher Zeit sieht man, **b)** nach welcher Zeit hört man am Brunnenrande das Auftreffen des Steines?

---

1) Die zur Lösung nötigen Formeln aus der Physik werden in diesem Abschnitt als bekannt vorausgesetzt.

2) In Aufgabe 87—90 ist der Luftwiderstand zu vernachlässigen.

88. Ein Stein fällt in einen Brunnen. Das Aufschlagen auf den Boden wird am oberen Rande des Brunnens 4 Sekunden nach Beginn des Falles gehört. Wie groß stellt sich die Tiefe des Brunnens (in Metern), wenn man die Schallgeschwindigkeit zu 333 m in der Sekunde annimmt und die Gültigkeit des Fallgesetzes voraussetzt ($g = 9{,}8$)?

89. Ein Stein wird in einen 113 m tiefen Brunnen geworfen und schlägt nach 3 Sekunden auf. Wie groß war seine Anfangsgeschwindigkeit?

90. Ein Pfeil wird vertikal nach oben geschleudert und erreicht eine Höhe von 35 m. **a)** Nach welcher Zeit erreicht er den höchsten Punkt? **b)** Wann fällt er wieder auf die Erde? **c)** Wie groß mußte die Anfangsgeschwindigkeit sein?

91. Eine Kugelschale von 1 cm Dicke taucht im Wasser 13 cm tief ein; der Stoff, aus dem sie besteht, hat das spezifische Gewicht 2,75. Welche Länge haben ihre Radien?

92. Die Resultierende zweier senkrecht aufeinander stehender Kräfte ist 13 kg. Wird die eine Kraft verdreifacht, die andere um ihren dritten Teil verringert, so ist die Resultierende 17 kg. Wie groß sind die Kräfte?

93. Von zwei Pendeln macht das kürzere **a)** 5, **b)** a Schwingungen, während das längere **a)** 4, **b)** b Schwingungen macht. Das eine Pendel ist 45 cm länger als das andere. Wie lang sind die Pendel?

Optik.

94. Bei einem Hohlspiegel mit der Brennweite 40 cm sind Gegenstand und Bild 65 cm voneinander entfernt. Welchen Abstand haben sie vom Spiegel?

95. Bei einer Sammellinse mit der Brennweite 30 cm sollen Gegenstand und Bild 5 m voneinander entfernt sein. Welche Abstände muß der Gegenstand von der Linse haben?

Elektrizitätslehre.

96. Ein elektrischer Strom von 7 Volt Spannung verliert durch Einschaltung eines Drahtes von 3 Ohm Widerstand 2,1 Amp. an Stärke. Wie groß war der ursprüngliche Gesamtwiderstand?

97. Zwei Drähte geben bei Hintereinanderschaltung einen Widerstand von 9 Ohm, bei Nebeneinanderschaltung einen Widerstand von 2 Ohm. Wie groß ist der Widerstand des einzelnen Drahts?

98. Von zwei Drähten hat der eine einen um 1,5 Ohm größeren Widerstand als der andere. Nebeneinandergeschaltet bilden sie einen verzweigten Stromweg von 1,8 Ohm Gesamtwiderstand. Wie groß sind die Einzelwiderstände?

Aufgaben aus alter Zeit.

Aus der Arithmetica des Diophant von Alexandrien (zweite Hälfte des 3. Jahrh. n. Chr.):

99. Zu zwei gegebenen Zahlen, 200 und 5, ist eine dritte zu bestimmen, die mit der einen multipliziert ein Quadrat, mit der anderen multipliziert die Wurzel dieses Quadrats gibt. [Wenn x^2 ein Quadrat ist, so ist x die Wurzel.]

Aus der Algebra des Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (erstes Viertel des 9. Jahrhunderts):

100. 1 Quadrat und 21 an Zahlen sind gleich 10 Wurzeln desselben Quadrates, d. h. was muß der Betrag eines Quadrates sein, welches nach Addition von 21 gleichwertig wird mit 10 Wurzeln jenes Quadrates? [Wenn x^2 ein Quadrat ist, so ist x hier die Wurzel genannt!]

101. Ein Quadrat und 10 seiner Wurzeln sind gleich 39; d. h. wenn du zu einem Quadrate 10 Wurzeln addierst, so wird dieses zusammengenommen gleich 39.

Aus dem Indischen des Bhâskara (geb. 1114 n. Chr.):

102. Der 8. Teil einer Herde Affen ins Quadrat erhoben hüpfte in einem Haine herum und erfreute sich an dem Spiele, die 12 übrigen sah man auf einem Hügel miteinander schwatzen. Wie stark war die Herde?

103. Das Quadrat des um 3 verminderten 5. Teiles einer Herde Affen war in einer Grotte verborgen, 1 Affe war sichtbar, der auf einen Baum geklettert war Wieviele waren es im ganzen?

104. Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor; vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkte unter dem Wasser; wie tief war der Teich?[1])

105. Dicht am Ufer eines Baches steht eine Pappel. Ein Sturmwind knickt sie 3 m über dem Boden und sie fällt senkrecht zur Richtung des 4 m breiten Baches mit der Spitze an den Rand des jenseitigen Ufers; wie hoch war die Pappel?[2])

Aus Leonardo Pisanos Liber Abaci (um 1200):

106. $\frac{19}{20}$ einer Zahl erweisen sich als die Quadratwurzel eben dieser Zahl. Wie heißt die Zahl?

107. Zwen Thurn stehn uff einer ebene 60 eln von einander. Der ein ist 50 eln hoch. Der andern 40. Zwischen den zweyen Thurnen steht ein brunne, gleych veyt von den Spitzen der Thurnen. Ist die frag, wie fern steht der brunne unden von yedem Thurn?[3])

Aus einer Münchener Handschrift des 15. Jahrhunderts:

108. Vind 1 zal, das ich $\frac{1}{3}$ vnd [= plus] $\frac{1}{4}$ von der selben zal genemen [= wegnehmen] mug, vnd was v̊ber pleibt, wil ich furpas in sich selb multipliciren, vnd schol 16 tragen?

109. Arbor 20 pedum iuxta aquam 6 pedum, queritur, in qua parte frangatur, ut summitas eius extremitati aque iungatur. [Ein Baum von 20 Fuß an einem 6 Fuß breiten Bach. Gefragt wird, wo er umbrechen muß, wenn seine Spitze gerade bis zur anderen Seite des Baches reichen soll.]

110. Item arbor 20 pedum frangitur in 8 pedibus a radice; queritur, ad quod se extendit a basi. [Ein Baum von 20 Fuß bricht 8 Fuß über der Wurzel um. Gefragt wird, wie weit die Spitze vom Stamme entfernt ist.]

111. Nota scala 13 pedum distans a muro per 5 adhuc retrahitur per 7 pedes, ut sit elongata a basi per 12: queritur, quot descendit in muro. [Eine Leiter von 13 Fuß steht unten von der Mauer 5 Fuß ab und wird unten um 7 Fuß zurückgezogen, so daß sie 12 Fuß absteht. Gefragt wird, wieviel die Leiter an der Mauer herabgleitet.]

---

1) Vgl. die Aufgabe 189, § 17 aus der chinesischen Arithmetik.
2) Vgl. Aufg. 109 und 110 dieses Paragraphen.
3) Diese Fassung der Aufgabe ist von Christian Rudolff (dessen Coß von 1525, in 2. von Michael Stifel besorgter Auflage 1553).

§ 40. Einfache algebraische Funktionen zweiten Grades.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

1. a) Löse $x^2 + y^2 = r^2$ nach y auf und gib eine graphische Darstellung der Funktion für $r = 5$. **b)** Für welche Werte von x wird y imaginär? **c)** Beweise, daß die Kurve ein **Kreis** ist.

2. Stelle graphisch dar die Funktionen:

a) $2x^2 + 2y^2 = 50$, b) $5x^2 + 5y^2 = 60$,

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 8$, d) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + 8$.

3. Verschiebe den Mittelpunkt des Kreises $x^2 + y^2 = 9$ um

a) 3 nach rechts, b) 2 nach links,

c) 10 nach oben, d) $\frac{2}{3}$ nach unten,

e) 2 nach rechts und 5 nach oben, f) 3 nach unten und 4 nach links,

g) a nach rechts und b nach oben.

Gib in jedem Falle die Gleichung des Kreises an und die etwa vorhandenen Nullstellen der Funktion.

4. Welches ist die Lage des Kreismittelpunktes und welches die Größe des Kreisradius bei den folgenden Gleichungen:

a) $(x + 3)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 9$, b) $x^2 + 4x + y^2 = 12$,

c) $x^2 + y + y = 3\frac{3}{4}$, d) $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 20$,

e) $x^2 + y^2 - x - y = 8\frac{1}{2}$, f) $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 2$,

g) $x^2 + y^2 + ax + by = c$.

5. Gib von den folgenden Funktionen an, ob sie die darstellenden Kurven axialsymmetrisch zur x-Achse oder y-Achse oder zu beiden sind:

a) $x^2 + y^2 = a^2$, b) $x^2 + y^2 + x = a$,

c) $x^2 + y^2 + ay = b$, d) $x^2 + ax + y^2 + by = c$.

6. a) Wie lautet die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt um seinen Radius $r = b$ nach rechts und um die Größe a nach oben verschoben ist. **b)** Welche Gleichung zweiten Grades befriedigen die Werte von x, die den Schnittpunkten des Kreises mit der x-Achse entsprechen?

7. Gib nach der vorangehenden Aufgabe eine Konstruktion für die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

an, wobei nur ein beweglicher Kreis und sein Schnitt mit der x-Achse benutzt wird.

8. Konstruiere in gleicher Weise die Wurzeln folgender Gleichungen:

a) $x^2 - 6x + 4 = 0$, b) $x^2 - 4x + 1 = 0$,

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$, d) $x^2 - 7x + 6 = 0$.

In jedem Falle sind die Gleichungen auch arithmetisch zu lösen.

9. Stelle die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $a = 10$ cm als Funktion der anderen Kathete dar.

10. Stelle den Abstand einer Sehne in einem Kreise mit dem Radius $r = 8$ cm als Funktion der halben Sehne dar.

11. Stelle **a)** den Kosinus eines Winkels dar als Funktion des Sinus desselben Winkels, **b)** den Sinus als Funktion des Kosinus.

12. Ein Rechteck mit den Seiten a und b soll so verändert werden, daß die Diagonale einen konstanten Wert behält. In welcher Beziehung müssen die Seiten x und y der neuen Rechtecke zueinander stehen? Stelle die Beziehung graphisch dar ($a = 1$, $b = 3$).

$$x^2 - y^2 = r^2.$$

13. a) Löse $x^2 - y^2 = r^2$ nach y auf und gib eine graphische Darstellung der Funktion für $r = 5$. **b)** Für welche Werte von x wird y imaginär?

14. Stelle graphisch dar die Funktionen

a) $2x^2 - 2y^2 = 32$, **b)** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 5$,

c) $3x^2 = 27 + 3y^2$.

15. Verschiebe den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = r^2$ um

a) 3 nach rechts, **b)** 2 nach links,

c) 10 nach oben, **d)** $\frac{2}{3}$ nach unten,

e) 2 nach rechts und 5 nach oben,

f) 3 nach unten und 4 nach links,

g) a nach rechts und b nach oben.

Gib in jedem Falle die Gleichung der Hyperbel an und die Nullstellen der Funktion.

16. Welches ist die Lage des Hyperbelmittelpunktes und welches die Größe der Hyperbelachse (der Wert r) bei den folgenden Gleichungen:

a) $(x + 3)^2 - (y - \frac{3}{2})^2 = 9$, **b)** $x^2 + 4x - y^2 = 12$,

c) $x^2 - y^2 + y = 4{,}25$, **d)** $x^2 - y^2 - y = 4{,}25$,

e) $x^2 - 2x - y^2 + 4y = 28$, **f)** $x^2 - y^2 + x - y = 5$,

g) $x^2 - y^2 + ax + by = c$?

17. Löse $y^2 - x^2 = r^2$ nach y auf und gib eine graphische Darstellung der Funktion für $r = 5$.

18. In welcher Beziehung steht die Kurve $y^2 - x^2 = r^2$ zu der Kurve $x^2 - y^2 = r^2$ **a)** arithmetisch, **b)** geometrisch?

19. a—g) Verschiebe den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel $y^2 - x^2 = r^2$ um die in Aufg. 15 a—g angegebenen Werte. Gib in jedem Falle die Gleichung der Hyperbel an und die etwa vorhandenen Nullstellen der Funktion.

20. Welches ist die Lage des Hyperbelmittelpunktes und welches die Größe der Hyperbelachse (der Wert r) bei den folgenden Gleichungen:

a) $(y + 3)^2 - (x - \frac{3}{2})^2 = 9$, **b)** $y^2 + 6y - x^2 = 7$,

c) $x^2 + 4x - y^2 + 12 = 0$, **d)** $x^2 - y^2 + x - y = -5$,

e) $x^2 - y^2 + ax + by + c = 0$?

21. Gib von den folgenden Funktionen an, ob die ihnen entsprechenden Kurven axialsymmetrisch zur x-Achse oder y-Achse oder zu beiden sind:

a) $x^2 - y^2 = r^2$, b) $y^2 - x^2 = r^2$,
c) $x^2 + x - y^2 = a$, d) $y^2 + y - x^2 = b$,
e) $x^2 - y^2 - x - y = c$.

22. Stelle die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete $b = 8$ cm ist, als Funktion der Hypotenuse dar.

23. Stelle die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete $b = 6$ cm als Funktion der anderen Kathete dar.

24. Zwei Zahlen sind in der Weise voneinander abhängig, daß das Produkt aus ihrer Summe und ihrer Differenz 360 wird. Stelle die eine Zahl als Funktion der anderen dar.

Vermischte Aufgaben und Wiederholungen.

25. Gib eine graphische Darstellung der Funktionen **a)** $y^2 = ax$, **b)** $x^2 = ay$, **c)** $yx = a$ für den Wert $a = 2$. **d)** Welche Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen in bezug auf die einzelnen Kurven? **e)** Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Kurven $y^2 = ax$ und $x^2 = ay$?

26. Stelle die folgenden Funktionen graphisch dar und gib jedesmal die Koordinaten der Scheitelpunkte der Parabeln an:

a) $y^2 - x = 0$, b) $x^2 + y = 0$,
c) $x^2 + 5y = 0$, d) $x^2 - 5y = 0$,
e) $y^2 + 5x = 0$, f) $y^2 - 5x = 0$,
g) $2x - y^2 = 0$, h) $3y^2 - 2x = 0$.

27. Verschiebe **a)** die Parabel $y^2 = ax$, **b)** die Parabel $x^2 = by$ um m nach rechts und n nach oben; wie lauten die Gleichungen der neuen Kurven?

28. Stelle die folgenden Funktionen graphisch dar:

a) $y^2 - x = 3$, b) $y^2 + 3 = x$,
c) $x^2 - y = 2$, d) $x^2 + 2 = y$,
e) $(x - 2)^2 + y = 0$, f) $(y - 1)^2 - x = 0$,
g) $(x - 3)^2 - y + 2 = 0$, h) $(y - 3)^2 = -3x + 6$.

und gib jeweilig die Koordinaten der Scheitelpunkte der Parabeln an.

29. Untersuche, welche geometrische Bedeutung die folgenden Funktionen haben:

a) $x^2 + y^2 = 0$, b) $x^2 + y^2 = 0$,
c) $xy = 0$, d) $x \pm y = 0$,
e) $y^2 = 0$, f) $x^2 = 0$,
g) $(x + 3)(y - 2) = 0$, h) $(x - 2)(y - 4) = 0$.

§ 41. Einfache Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Summe oder Differenz und Produkt der Unbekannten gegeben.

Die folgenden Gleichungen sind graphisch und arithmetisch zu lösen:

1. $x + y = 5$
$xy = 6$.

2. $x - y = 2$
$xy = 48$.

3. $x - y = 7$
$xy = 30.$

4. $y - x = -3$
$xy = 4$

5. $x - y = 5$
$xy = 36.$

6. $x + y = 2$
$xy = -15.$

7. $x - y = \frac{5}{6}$
$xy = 1.$

8. $x\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 19$
$xy = 90.$

Die folgenden Gleichungen sind arithmetisch zu lösen:

9. $x + y = a$
$x \cdot y = b.$

10. $x - y = a$
$xy = b.$

11. $x + y = 2a$
$x \cdot y = a^2.$

12. $x - y = a - b$
$xy = ab.$

13. $x + xy + y = 7$
$x - xy + y = 1.$

14. $2x - xy + 2y = 4$
$2x + xy + 2y = 6.$

Benutze den Vietaschen Wurzelsatz (§ 37, Aufgabe 170) zur Lösung folgender Gleichungen:

15. $x^2 - 8x + 15 = 0.$

16. $x^2 - 13x + 42 = 0.$

17. $x^2 - 2x - 63 = 0.$

18. $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$

19. $x^2 - 200x + 9996 = 0.$

20. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

21. $x^2 + (a - b)x - ab = 0.$

22. $x^2 + px + q = 0.$

Die folgenden Gleichungen sind arithmetisch durch Einführung von Hilfsgrößen zu lösen:

23. $x + y = 12$
$(x - 1) \cdot (y - 1) = 24.$

24. $x + y = 18$
$(x - 7) \cdot (y + 3) = 48.$

25. $(x - 8) \cdot (y - 6) = 0$
$x + y = 13.$

26. $(x - 3) \cdot (y - 4) = 0$
$4x + 3y = 36.$

27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
$xy = 9.$

28. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$
$xy = 36.$

29. $x^3 + y^3 = 28$
$xy = 3.$

30. $x^3 - y^3 = 19$
$xy = 6.$

Summe der Quadrate und Produkt der Unbekannten gegeben.

Löse arithmetisch und geometrisch folgende Gleichungen:

31. $x^2 + y^2 = 5$
$xy = 2.$

32. $x^2 + y^2 = 40$
$xy = 12.$

33. $x^2 + y^2 = 130$
$xy = 63.$

34. $x^2 + y^2 = 4\frac{4}{9}$
$3xy = 4.$

35. $x^2 + y^2 = 52$
$xy = 24.$

36. $x^2 + y^2 = 1{,}16$
$5xy = 2.$

Löse arithmetisch folgende Gleichungen:

37. $x^2 + y^2 = a$
$xy = b.$

38. $x^2 + y^2 = 2a^2$
$xy = a^2$

39. $xy = 4$
$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 16.$

40. $x^2 + xy + y^2 = 549$
$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 738.$

41. $x^2 + xy + y^2 = 57$
$x^2 - xy + y^2 = 43.$

42. $x^2 + xy + y^2 = 2a$
$x^2 - xy + y^2 = 2b.$

43. $x^2 - xy + y^2 = 39$
$2x^2 - 3xy + 2y^2 = 43.$

44. $x^2 + 5xy + y^2 = 79$
$x^2 + 3xy + y^2 = 59.$

Differenz der Quadrate und Summe oder Differenz der Unbekannten gegeben.

Graphisch und arithmetisch bestimme die Wurzeln der Gleichungen:

45. $x^2 - y^2 = 7$
$x - y = 1.$

46. $x^2 - y^2 = 24$
$x + y = 6.$

47. $x^2 - y^2 = 5$
$x - y = 4.$

48. $x^2 - y^2 = 20$
$y - x = 7.$

Arithmetisch — gegebenenfalls durch Einführung von Hilfsgrößen — sind zu lösen:

49. $x^2 - y^2 = a$
$x - y = b.$

50. $x^2 - y^2 = a$
$x + y = b.$

51. $x^2 - y^2 = a^2$
$x - y = a.$

52. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$
$x + y = a - b.$

53. $(x+2)^2 - y^2 = 56$
$x + y = 2.$

54. $(x-1)^2 - (y+3)^2 = 3$
$x - y = 1.$

55. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12$
$x - y = 72.$

56. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$
$x - y = 25.$

Summe der Quadrate und Summe oder Differenz der Unbekannten gegeben.

Löse arithmetisch und graphisch folgende Gleichungen:

57. $x^2 + y^2 = 250$
$x - y = 4.$

58. $x^2 + y^2 = 90$
$x + y = 12.$

59. $x^2 + y^2 = 136$
$x + y = 16.$

60. $x^2 + y^2 = 100$
$x - y = 2.$

Löse arithmetisch — gegebenenfalls durch Einführung von Hilfsgrößen — die Gleichungen:

61. $x^2 + y^2 = a$
$x + y = b.$

62. $x^2 + y^2 = a$
$x - y = b.$

63. $x^2 + y^2 = a^2$
$x + y = 2a.$

64. $x^2 + y^2 = a$
$x - y = 0.$

65. $x(x+2)+y(y+2)=183$
$x+y=17.$

66. $x(x+4)+y(y-4)=9$
$x-y=1.$

67. $x+y=58$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=10.$

68. $x+y=100$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=14.$

69. $\sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=4$
$x+y=5.$

70. $\sqrt{x+2}-\sqrt{y-1}=1$
$x+y=12.$

71. $(x+2)^2+(y-2)^2=13$
$x-y=-3.$

72. $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$
$x+y=0.$

Vermischte Beispiele.

Löse arithmetisch und graphisch folgende Gleichungen:

73. $x^2+y^2=25$
$x^2-y^2=5.$

74. $x^2+y^2=50$
$x^2-y^2=-48.$

75. $x^2-y^2=40$
$xy=21.$

76. $x^2-y^2=28$
$xy=48.$

77. $x^2-y^2=5$
$xy=6.$

78. $x^2-y^2=19$
$xy=-90.$

79. $x^2+y^2=40$
$x=3y.$

80. $x\cdot y=12$
$2x+3y=18.$

81. $xy=54$
$3x=2y.$

82. $x^2+y^2=50$
$9x+7y=70.$

83. $4x-3y=24$
$xy=96.$

84. $3x-2y=1$
$x^2+y^2=74.$

85. $x^2+y^2=100$
$x:y=3:4.$

86. $x^2-y^2=640$
$x:y=7:3.$

87. $x:y=9:4$
$x:12=12:y.$

88. $x:y=3:5$
$x:5=12:y.$

Löse arithmetisch die folgenden Gleichungen:

89. $2x^2-3x^2=24$
$2x=3y.$

90. $x(x+y)=25$
$2x+3y=10.$

91. $3x^2-7y^2=84$
$3x+7y=42.$

92. $5x^2+y=3xy$
$2x-y=0.$

93. $x^2+xy+y^2=343$
$2x-y=21.$

94. $x^2-xy+y^2=7$
$2x-3y=0.$

95. $x^2+2xy-y^2=7(x-y)$
$2x-y=5.$

96. $2x^2-5xy+y^2+10x+12y=100$
$2x-3y=1.$

97. $7(x+5)^2 - 9(y+4)^2 = 118$
$x - y = 1.$

98. $x^2 + y = y^2 + x - 18$
$x : y = 2 : 3.$

99. $x \cdot y = a$
$\frac{x}{y} = b.$

100. $x^2 + y^2 = a^2$
$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$

§ 42. Eingekleidete Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.[1])

Vorübungen.

1. Zwei Zahlen verhalten sich wie 7 : 9. Die Summe ihrer Quadrate beträgt 1170. Wie heißen die Zahlen?

2. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 3240. Wie heißen die Zahlen, wenn sie sich wie 7 : 3 verhalten?

3. Die Summe zweier Zahlen ist 90, ihr Produkt 2016. Wie heißen sie?

4. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 8, die Summe ihrer Quadrate 2210. Wie heißen sie?

5. Die Zahl 864 ist in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe gleich 60 ist.

6. Die Zahl 100 ist so in zwei Teile zu zerlegen, daß das Quadrat des ersten Teiles um 10 kleiner ist, als das Siebenfache des zweiten Teiles.

7. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 25, das geometrische Mittel ist 15. Wie heißen die Zahlen?

8. 14 ist die mittlere Proportionale zweier Zahlen, die sich um 21 unterscheiden. Wie heißen die beiden Zahlen?

Aufgaben aus der Planimetrie.

9. In einem Kreis von 13 cm Radius soll durch einen 5 cm vom Mittelpunkt abstehenden Punkt eine Sehne von 25 cm Länge gezogen werden. Wie lang fallen ihre Abschnitte aus?

10. Durch zwei konzentrische Kreise von den Radien $r = 25$ cm, $\varrho = 17$ cm soll eine Sehne so gelegt werden, daß das in den inneren Kreis fallende Stück zwei Fünftel der ganzen Sehnenlänge ausmacht. Wie lang ist die Sehne und wie groß ist ihr Abstand vom Mittelpunkt?

11. Außerhalb eines Kreises von 21 cm Radius liegt ein Punkt, der um 29 cm vom Mittelpunkt absteht. Von ihm soll nach dem Kreise eine Sekante gezogen werden, deren innerer Abschnitt 9 cm beträgt. Wie lang ist die Sekante?

12. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 82 m, die Diagonale 29 m. Wie lang sind die Seiten?

13. Die Diagonale eines Rechtecks, dessen Fläche 120 qm beträgt, hat eine Länge von 17 m. Wie lang sind die beiden Seiten?

14. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse 41 m lang ist, beträgt 180 qm. Wie lang sind die Katheten?

1) Hier sind nur einige wenige Beispiele gegeben. Aufgaben in größerer Zahl finden sich in der Oberstufe.

15. Die Fläche eines Rechtecks beträgt 168 qm, der Umfang 62 m. Wie lang sind die Seiten?

16. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 30 cm, die Höhe 12 cm. Wie groß sind die Hypotenusenabschnitte?

Aufgaben aus der Stereometrie.

17. Von den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Quaders, dessen Gesamtoberfläche 568 qcm beträgt, ist die erste um 4 cm länger als die zweite und um 4 cm kürzer als die dritte. Wie lang sind diese Kanten?

18. Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Rechteck von 26 cm Umfang, die Oberfläche beträgt 44π qcm. Wie groß ist der Rauminhalt?

19. Die Seitenlinie eines geraden Kegels ist um 3 cm größer als der Durchmesser der Grundfläche; die Oberfläche beträgt 36π qcm. Wie groß sind Mantel und Rauminhalt?

20. Die Höhe eines geraden Kegels beträgt 12 cm, der Mantel 135π qcm. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt?

Elftes Kapitel.

Exponentialfunktion und logarithmische Funktion.

§ 43. Die Exponentialfunktion; der Begriff des Logarithmus.

Die Exponentialfunktion.

1. Stelle die Funktion $y = 2^x$ graphisch dar, indem du zunächst den Wert der Funktion für ganzzahlige, positive und negative Werte von x bestimmst, dann für $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ usf., für $x = \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{5}{4}$ usf. Berechne auch noch die Werte der Funktion für $x = \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{5}{8}$ usf.

Stelle in gleicher Weise wie bei Aufgabe 1 die folgenden Exponentialfunktionen graphisch dar:

2. a) $y = 3^x$, **b)** $y = 5^x$. **3.** $y = 10^x$. **4.** $y = \frac{1}{10} \cdot 10^x$.

5. $y = 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 2^x$ (das Bodesche Gesetz für die Planetenbahndurchmesser; vergl. § 24, Nr. 25).

6. a) Beschreibe den Verlauf der Exponentialfunktion $y = a^x$, wo a eine beliebige positive Zahl größer als 1 ist. **b)** Welche Gestalt hat die Exponentialfunktion, wenn $a = 1$ wird?

7. a) Welche Gestalt nimmt die Exponentialfunktion an, wenn a ein positiver Bruch < 1 wird, etwa $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$?[1] **b)** Zeige, daß die Kurven $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ axialsymmetrisch zueinander sind; welches ist die Symmetrieachse?

Der Begriff des Logarithmus.

Die Gleichung

$$y = a^x$$

wird auch geschrieben in der Form

$$x = {}^a\log y.$$

---

1) Von negativen Grundzahlen a muß hier abgesehen werden. Welche Schwierigkeiten hier auftreten, zeigt schon eine Diskussion der Funktion $y = (-1)^x$.

Potenzgleichung und Logarithmengleichung haben gleiche Bedeutung. Drücke den Inhalt folgender Potenzgleichungen durch Logarithmengleichungen aus:

8. a) $5^2 = 25$, b) $2^5 = 32$, c) $7^3 = 343$, d) $3^7 = 2187$.

9. a) $4^4 = 256$, b) $3^3 = 27$, c) $5^3 = 125$, d) $8^3 = 512$.

Gib zu folgenden Logarithmengleichungen die entsprechenden Potenzgleichungen an:

10. a) ${}^{10}\log 10 = 1$ b) ${}^{7}\log 7 = 1$ c) ${}^{6}\log 36 = 2$ d) ${}^{3}\log 27 = 3$.

11. a) ${}^{3}\log 81 = 4$ b) ${}^{9}\log 81 = 2$ c) ${}^{4}\log 64 = 3$ d) ${}^{2}\log 64 = 6$.

12. Welches sind für die Basis 2 die Logarithmen folgender Zahlen: a) 2, b) 4, c) 64, d) 16, e) 128, f) 32, g) 1, h) $\frac{1}{4}$, i) $\frac{1}{2}$, k) $\frac{1}{8}$?

13. Welches sind für die Basis 3 die Logarithmen folgender Zahlen: a) 9, b) 81, c) 3, d) 27, e) 1, f) 243, g) $\frac{1}{27}$, h) $\frac{1}{9}$, i) $\frac{1}{81}$?

14. Welches sind die Briggsschen Logarithmen (Basis = 10) der folgenden Zahlen: a) 10, b) 100, c) 1000, d) 1000000, e) 1, f) 0,1, g) 0,001, h) 0,000001?

15. Welches sind für die Basis 2 die Logarithmen folgender Zahlen: a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[4]{2}$, c) $\sqrt[3]{2}$, d) $\sqrt[8]{2}$ e) $\sqrt[4]{2^3}$, f) $\sqrt[5]{2^4}$, g) $\sqrt[3]{4}$, h) $\sqrt[5]{8}$?

16. Welches sind für die Basis 3 die Logarithmen folgender Zahlen: a) $\sqrt[3]{3}$, b) $\sqrt[3]{3^2}$, c) $\sqrt{3}$, d) $\sqrt[4]{27}$, e) $\sqrt[5]{9}$, f) $\sqrt[5]{27}$, g) $\sqrt[5]{81}$?

17. Welches sind die Briggsschen Logarithmen der folgenden Zahlen a) $\sqrt{10}$, b) $\sqrt[4]{10}$, c) $\sqrt[4]{10^3}$, d) $\sqrt[8]{10}$, e) $\sqrt[8]{100}$, f) $\sqrt[8]{1000}$, g) $\sqrt[8]{10000}$, h) $\sqrt[8]{100000}$, i) $\sqrt[8]{1000000}$?

18. Welches sind für die Basis a (a soll eine positive Zahl sein) die Logarithmen folgender Größen: a) a^2, b) $\frac{1}{a}$, c) 1, d) a^n, e) $\sqrt{a}$, f) $\sqrt[n]{a}$, g) $\frac{1}{a^n}$, h) $\sqrt[n]{a^m}$, i) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$?

In den folgenden Gleichungen ist die Unbekannte x auf Grund der Definition des Logarithmus zu finden:

19. $x = {}^{2}\log 0{,}25$.

20. $x = {}^{4}\log 64$.

21. $x = {}^{8}\log 64$.

22. $x = {}^{5}\log 0{,}04$.

23. $x = {}^{2}\log 0{,}125$.

24. $x = {}^{5}\log 125$.

25. ${}^{2}\log x = 3$.

26. ${}^{3}\log x = 5$.

27. ${}^{4}\log x = 5$.

28. ${}^{6}\log x = 4$.

29. ${}^{2}\log x = 8$.

30. ${}^{7}\log x = 2$.

31. ${}^{8}\log x = 4$.

32. ${}^{9}\log x = 3$.

33. ${}^{x}\log 49 = 2$.

34. ${}^{x}\log 16 = 4$.

35. ${}^{x}\log 81 = 4$.

36. ${}^{x}\log 2197 = 3$.

37. ${}^{x}\log 5329 = 2$.

38. ${}^{x}\log 83521 = 4$.

39. Nenne die Reihe der Zahlen, deren Logarithmen a) im System mit der Basis 2, b) im System mit der Basis 3, c) im Briggsschen System ganzzahlig sind.

Die logarithmische Funktion.

40. Stelle $y = {}^2\log x$ **a)** durch Spiegelung der Kurve $y = 2^x$ an der Geraden $y = x$, **b)** direkt mit Hilfe einiger Werte x, für die y angebbar ist, graphisch dar.

41. Zeichne in gleicher Weise wie eben die Kurve $y = {}^3\log x$.

42. Von der Funktion $y = {}^{10}\log x$ ist ein graphisches Bild zu konstruieren in der Weise, daß die Kurve in Richtung der y-Achse zehnfach überhöht ist, bzw. daß die Einheit auf der y-Achse zehnmal so groß gewählt ist, als auf der x-Achse. Zur punktweisen Konstruktion benutze die Logarithmen der Zahlen $10^{\frac{1}{8}}$, $10^{\frac{2}{8}}$, usf. bis $10^{\frac{8}{8}}$, die durch Quadratwurzelziehen zu finden sind. — Weise nach, daß dieses Verfahren identisch mit einer Spiegelung der Kurve $y = 10^x$ an der Geraden $y = x$ unter Berücksichtigung der Verzerrung ist.

43. Lies an der nach Aufgabe 42 hergestellten logarithmischen Kurve die Logarithmen der Zahlen 2, 3, 4, ... 9 ab.

44. Beschreibe den Verlauf der logarithmischen Kurve $y = {}^n\log x$, wenn $n = 2, 3, 10$ ist.

45. Erkläre, um wieviel sich die Logarithmen **a)** $10n$, **b)** $100n$, **c)** $1000n$, **d)** $1000000n$, **e)** $\frac{n}{10}$, **f)** $\frac{n}{1000}$ von dem Logarithmus n im Briggsschen Logarithmensystem unterscheiden. ***g)** Es ist $\log 2 = 0{,}30103$, ***h)** $\log 3 = 0{,}47712$, bestimme die den Aufgaben a) bis f) entsprechenden Logarithmen, wenn **g)** $n = 2$, **h)** $n = 3$ gesetzt wird.

Elementare Berechnung von Briggsschen Logarithmen.[1])

46. Es ist $2^{10} = 1024$. Welche ungefähre Wertangabe läßt sich daraus für $\log 2$ folgern, wenn man beachtet, daß 1024 ein wenig größer als 1000 ist?

47. Berechne 2^{20}. Welche beiden Grenzen ergeben sich daraus für $\log 2$?

48. Setze $10^x = 7$ und bilde hieraus durch fortwährende Quadrierung weitere Gleichungen bis zu $7^{128} = 10^{128x}$. Welche Grenzen ergeben sich aus dieser Gleichung auf Grund der Stellenzahl von 7^{128} für $\log 7$?

49. Berechne auf gleiche Weise Grenzen für **a)** $\log 3$, **b)** $\log 43$, **c)** $\log 121$, **d)** $\log 237$.

50.[2]) Es ist eine Tabelle der Zahlen aufzustellen, deren Logarithmen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots$ sind. Die erste Zahl ist 10. Wie findet man daraus die zweite Zahl, wie daraus die dritte? Kontrolliere die folgende Tabelle, die in der ersten Spalte die Zahl und in der zweiten den zugehörigen Logarithmus dreistellig enthält:

N	L	N	L
10,000	1,000	1,037	$0{,}015_5$
3,162	0,500	1,018	0,008
1,778	0,250	1,009	0,004
$1{,}333_5$	0,125	$1{,}004_5$	0,002
1,155	$0{,}062_5$	1,002	0,001
1,075	0,031	$1{,}000_5$	$0{,}000_5$

1) Methoden, die für die wirkliche Berechnung der Logarithmen geeigneter sind, weil sie schneller zum Ziel führen, werden wir in der Oberstufe kennen lernen. Hier kommt es nur darauf an zu zeigen, daß es überhaupt möglich ist, Logarithmen zu berechnen.

2) Diese Longsche Methode (in vereinfachter Form) setzt den Satz voraus, daß der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist.

51. Zerlege die Zahl 6 in lauter Faktoren, die auf der linken Seite unserer Tabelle vorkommen. (Anleitung: der größte Faktor, der vorkommen kann, ist 3,162. Nun ist 6 : 3,162 = 1,898, mithin ist 6 = 3,162 · 1,898. Der größte in 1,898 vorkommende Faktor ist 1,778. Nun ist 1,898 = 1,778 · 1,068, folglich 6 = 3,162 · 1,778 · 1,068. Jetzt ist in gleicher Weise 1,068 in Faktoren zu zerlegen.) Es ergibt sich

$$6 = 3{,}162 \cdot 1{,}778 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}009 \cdot 1{,}002 \cdot 1{,}000_5.$$

Daraus folgt log 6 als Summe der Logarithmen der Faktoren.

52. Berechne nach dieser Methode unter Verwendung der Tabelle in Aufgabe 50 **a)** log 2, **b)** log 3, **c)** log 5.

Aufsuchen der Logarithmen in der Tafel.[1])

Suche die folgenden Logarithmen auf:

53. a) log 5, **b)** log 8, **c)** log 7.
54. a) log 31, **b)** log 35, **c)** log 57.
55. a) log 223, **b)** log 532, **c)** log 643.
56. a) log 785, **b)** log 101, **c)** log 700.
57. a) log 98,1, **b)** log 1,01, **c)** log 0,873.
58. a) log 3330, **b)** log 9990000, **c)** log 0,0387.

Bei Benutzung fünfstelliger Logarithmen sind auch folgende Logarithmen ohne Verwendung der Interpolation aufzusuchen:

59. a) log 3491, **b)** log 6897, **c)** log 4389.
60. a) log 3,780, **b)** log 73,14, **c)** log 5,390.
61. a) log 186,6, **b)** log 99,01, **c)** log 11,11.
62. a) log 2,299, **b)** log 7,809, **c)** log 54,06.
63. a) log 0,09387, **b)** log 0,7538, **c)** log 0,8302.

Suche zu folgenden Logarithmen, die sämtlich genau in den Tafeln stehen, den Numerus auf.

[4-stellige Logarithmen:]

64. a) 0,9101, **b)** 0,7135, **c)** 0,7482.
65. a) 1,7033, **b)** 1,8567, **c)** 0,3424 — 2.
66. a) 4,9330, **b)** 0,9987 — 2, **c)** 0,4771 — 3.
67. a) 2,0531, **b)** 0,0043, **c)** 6,6201.

[5-stellige Logarithmen:]

68. a) 1,97772, **b)** 2,69425, **c)** 0,93611.
69. a) 1,56820, **b)** 0,70027 — 1, **c)** 0,99021 — 2.
70. a) 0,56820, **b)** 0,43457 — 3, **c)** 4,58636.
71. a) 0,56820 — 2. **b)** 0,83020 — 1, **c)** 0,75043.

---

1) Bei den Aufgaben dieses Abschnittes war zu berücksichtigen, daß die einen 4-stellige, die anderen 5-stellige Logarithmentafeln benutzen. Wo es nötig ist, sind deshalb besondere Hinweise gegeben.

72. Es ist $\log 2 = 0{,}30103$ [4-stellig 0,3010] und $\log 3 = 0{,}47712$ [4-stellig 0,4771]. Markiere diese Punkte der logarithmischen Kurve und verbinde sie durch eine Gerade. **a)** Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Punkte, in denen diese Gerade die Gerade $x = 2{,}1$, die Gerade $x = 2{,}2$ usf. bis $x = 2{,}9$ schneidet. **b)** Stelle eine Tabelle der Abweichungen dieser durch Interpolation gefundenen Werte von den (aus der Logarithmentafel zu entnehmenden) Werten von $\log 2{,}1$, $\log 2{,}2$ usf. auf. Wo sind die Abweichungen am größten, wo am geringsten?

Benutze bei der Aufsuchung der Logarithmen für die folgenden Zahlen Tafel und Interpolationsregel:

[4-stellig]:

73. **a)** $\log 2307$, **b)** $\log 4036$, **c)** $\log 5751$, **d)** $\log 8973$.

74. **a)** $\log 4715$, **b)** $\log 8137$, **c)** $\log 6548$, **d)** $\log 9138$.

75. **a)** $\log 357{,}6$, **b)** $\log 47{,}38$, **c)** $\log 5{,}831$, **d)** $\log 0{,}7356$.

76. **a)** $\log 0{,}03875$, **b)** $\log 0{,}008423$, **c)** $\log 0{,}09387$, **d)** $\log 0{,}0009246$.

77. **a)** $\log 56\frac{1}{4}$, **b)** $\log 423\frac{1}{2}$, **c)** $\log 215\frac{1}{5}$, **d)** $\log 4\frac{3}{8}$.

[5-stellig]:

78. **a)** $\log 53843$, **b)** $\log 74067$, **c)** $\log 80395$, **d)** $\log 76306$.

79. **a)** $\log 38057$, **b)** $\log 74183$, **c)** $\log 62626$, **d)** $\log 83638$.

80. **a)** $\log 34{,}043$, **b)** $\log 3{,}7408$, **c)** $\log 0{,}57654$, **d)** $\log 0{,}084375$.

81. **a)** $\log 4{,}7385$, **b)** $\log 0{,}38471$, **c)** $\log 763{,}84$, **d)** $\log 0{,}075638$.

82. **a)** $\log 47\frac{5}{8}$, **b)** $\log 736\frac{3}{4}$, **c)** $\log \frac{3}{32}$, **d)** $\log 23\frac{7}{25}$.

Die folgenden Zahlen sind erst auf die passende Stellenzahl abzukürzen, und dann ist ihr Logarithmus aufzusuchen:

83. **a)** 3,141592653 ..., **b)** 2,7182818284 ...

84. **a)** $1\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{43}{24}$, **c)** $3\frac{1}{7}$, **d)** $\frac{47}{36}$.

85. **a)** 2,347347 ..., **b)** 0,303303 ...

86. **a)** 0,389389 ..., **b)** 335,888 ...

Suche die Numeri zu den folgenden Logarithmen:

[4-stellig]:

87. **a)** 0,9193, **b)** 0,6307, **c)** 0,2437, **d)** 0,8850.

88. **a)** 1,9017, **b)** 0,1626 — 1, **c)** 3,7080, **d)** 5,9000.

89. **a)** 0,0440 — 1, **b)** 0,1305 — 3, **c)** 0,3580 — 5, **d)** 0,5675 — 4.

[5-stellig]:

90. **a)** 4,38754, **b)** 3,05867, **c)** 2,75306, **d)** 1,65073.

91. **a)** 0,83705, **b)** 2,85439, **c)** 0,40765 — 1, **d)** 0,37605 — 2.

92. **a)** 0,08375, **b)** 0,95368 — 3, **c)** 1,75431, **d)** 0,57093 — 1.

Logarithmische Skalen.

93. **a)** Zeichne eine zehnfach überhöhte logarithmische Kurve $y = {}^{10}\log x$ und projiziere die zu den $x = 1, 2, 3$ usf. bis 10, dann 20, 30 usf. bis 100 gehörigen Werte der Kurve [das letztere wird infolge der Länge nur bei anderer Wahl des

Maßstabes möglich sein] auf die y-Achse. **b)** Trage in die Kurve auch die zu 1,5, ferner 2,5 usf. gehörigen Werte ein.

94. Markiere auf der logarithmischen Skala **a)** die Punkte 2, 4, 8, 16, 32, 64, **b)** die Punkte 3, 9, 27, 81. Was ist über die Abstände zu sagen?

95. Stelle eine logarithmische Skala in der Weise her, daß du für den Abstand von 1 bis 2 (d. h. für log 2) als Einheit 1 cm wählst. **a)** Wo liegen dann die Punkte 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024? **b)** Trage ungefähr nach Augenmaß die Punkte 100, 200, 300 usf. bis 1000 ein.

96. a) Stelle eine logarithmische Skala in der Weise her, daß du für den Abstand 1 bis 2 (d. h. für log 2) als Einheit 1 mm wählst. **b)** Setze ungefähr $1024 \approx 1000$ und führe die Skala in der gleichen Weise bis 1000000 fort, **c)** bis 10^9, **d)** bis 10^{12}, **e)** bis 10^{15}.

Benutze die nach Aufgabe 96 hergestellte Skala zur geometrischen Veranschaulichung folgender Größenverhältnisse:

97. Die elektrischen Wellen, die für die Funkentelegraphie benutzt werden, haben eine Länge von 3 m bis 400 m, die kürzesten bis jetzt verwandten Hertzschen Wellen sind solche von 3 mm. Die längsten Wellen im Ultrarot, soweit es erforscht ist, haben eine Länge von 0,06 mm. Das sichtbare Spektrum liegt zwischen 0,8 μ ($1\,\mu = 0{,}001$ mm) und 0,4 μ. Das Ultraviolett reicht bis etwa 100 $\mu\mu$ ($1\,\mu\mu = 0{,}001\,\mu$).

98. Der Durchmesser eines Moleküles hat die Größenordnung 1 $\mu\mu$ ($1\,\mu\mu = \frac{1}{1000}\,\mu = \frac{1}{1000000}$ mm). Die kleinste im Mikroskop wahrnehmbare Entfernung beträgt etwa $\frac{1}{4}\,\mu$. Die kleinste mit bloßem Auge wahrnehmbare Entfernung beträgt etwa $\frac{1}{10}$ mm. Die durchschnittliche Größe des Menschen ist etwa 1,70 m. Der Eifelturm hat eine Höhe von 300 m. Der höchste Berg auf der Erde, der Mt. Everest, ist ca. 8800 m hoch. Der Halbmesser des Mondes beträgt 1740 km, der der Erde 6370 km, der der Sonne 1400000 km.

99. Die mittlere Geschwindigkeit eines marschierenden Soldaten beträgt 1,3 m pro sec. Ein Pferd legt im Galopp etwa 5 m pro sec zurück, ein Radfahrer im Maximum 15 m pro sec. Die besten Luftschiffe legen heute etwa 20 m pro sec, ein D-Zug bis 25 m pro sec zurück. Die Geschwindigkeit des Schalles beträgt etwa 330 m pro sec, die Anfangsgeschwindigkeit eines Geschosses des Infanteriegewehres 620 m pro sec. Die Erde bewegt sich auf ihrer Bahn um die Sonne mit einer Geschwindigkeit von 30 km pro sec. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 300000 km pro sec.

§ 44. Das Rechnen mit Logarithmen.

Logarithmengesetze und ihre Anwendung auf die Umformung algebraischer Ausdrücke.

1. Erkläre durch Rückgang auf die Potenzschreibweise die folgenden Gesetze über das Rechnen mit Logarithmen (sprich die Gesetze in Worten aus!):

$$\text{I. } \log (a \cdot b) = \log a + \log b,$$

$$\text{II. } \log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$$

$$\text{III. } \log a^n = n \log a,$$

$$\text{IV. } \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$$

Logarithmiere die folgenden Ausdrücke:

2. $\log abc$.
3. $\log 3ax(x+y)$.
4. $\log \frac{ab}{c(x+7)}$.
5. $\log \frac{(a+b)x}{(c-d)y}$.
6. $\log ab^2$.
7. $\log (ab)^2$.
8. $\log (a^2 - b^2)$.
9. $\log (a^2 - 1)$.
10. $\log a\sqrt[3]{b}$.
11. $\log \sqrt{ab}$.
12. $\log 5a^2b\sqrt[3]{c}$.
13. $\log 7x\sqrt[4]{ab^3}$.
14. $\log 31x(7x-8)^3$.
15. $\log 8a^2b(6c-d)^2$.
16. $\log 5x\sqrt[4]{a(8y-z)}$.
17. $\log 9xy^3\sqrt{(a^2+b^2)c}$.
18. $\log \frac{ab^3}{c\sqrt{d}}$.
19. $\log \frac{a^2\sqrt[3]{x}}{5cy^3}$.
20. $\log \frac{23a(x-y)^4}{324\sqrt[3]{(ax-y)^2}}$.
21. $\log \frac{a^3\sqrt{c(ax-b)}}{(x+z)\sqrt[3]{cx-d}}$.
22. $\log \sqrt{\frac{ax}{x-y}}$.
23. $\log \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^5$.
24. $\log \frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{cx^3}{d^2}}$.
25. $\log \frac{a-b}{c-d}\sqrt[3]{\frac{cx-d}{ax-b}}$.
26. $\log \frac{1}{(a+b^2)^7}$.
27. $\log \frac{1}{a\sqrt[5]{c-x}}$.
28. $\log \frac{a(bx-c)^{\frac{1}{2}}}{(mx-n)^{-3}}$.
29. $\log \left(\frac{ax-b}{x\sqrt{y-z}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Verwandle die folgenden Summen und Differenzen von Logarithmen in Logarithmen von Produkten und Quotienten:

30. $\log a + \log b - \log c$.
31. $\log a - \log b + \log c - \log d$.
32. $\log a - (\log b + \log c) + \log d$.
33. $3\log a + 2\log b - 4\log c$.
34. $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y + \frac{1}{4}\log z$.
35. $2\log a - \frac{1}{2}\log b + \frac{1}{3}\log x - 3\log y$.
36. $7\log(a+b) - \frac{2}{5}\log(a-b) + \frac{1}{2}\log x - 4\log y$.
37. $\frac{2}{3}\log(ax-b) - \frac{5}{4}\log(cx-d) + \frac{3}{5}\log(mx-n)$.
38. $\frac{1}{3}\log(a^2+b^2) - \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)]$.
39. $2\log(x-y) - \frac{1}{2}\log(x^2 - xy + y^2) - \frac{1}{2}\log(x+y)$.
40. $\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ax}{dy}$.
41. $\log\frac{x}{y} + \log(xy) - 3\log(x-y) - \log\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Numerisches Rechnen mit Logarithmen.

Berechne die folgenden Zahlenausdrücke numerisch [die Zahlen sind vorher bei Benutzung 5-stelliger Tafeln auf 5, bei Benutzung 4-stelliger Tafeln auf 4 geltende Ziffern abzukürzen]:

42. a) $948{,}8 \cdot 0{,}04388$, b) $3{,}410 \cdot 0{,}008763$.

43. a) $0{,}0003769 \cdot 830{,}8$, b) $8{,}440 \cdot 98{,}27$.

44. a) $276{,}586 \cdot 0{,}037948$, b) $538{,}974 \cdot 0{,}14839$.

45. a) $\frac{2{,}3768}{0{,}87534}$, b) $\frac{34{,}785}{3{,}8768}$.

46. a) $\frac{73{,}5875}{0{,}895347}$, b) $\frac{3{,}78548}{0{,}40382}$.

47. a) $\frac{7{,}8564 \cdot 3{,}7653}{98{,}706}$, b) $\frac{17{,}539 \cdot 0{,}87643}{42{,}397}$.

48. a) $\frac{5{,}4763 \cdot 19{,}8547}{23{,}6053}$, b) $\frac{736{,}894 \cdot 0{,}09387}{19{,}7508}$.

49. a) $\frac{754{,}098}{24{,}6893 \cdot 8{,}4957}$, b) $\frac{98{,}3907}{0{,}76085 \cdot 58{,}9673}$.

50. a) $\frac{839 \cdot 0{,}75436}{976 \cdot 0{,}08754}$, b) $\frac{0{,}43687 \cdot 47643}{9{,}7685 \cdot 8{,}0765}$.

51. a) $\frac{576 \cdot 0{,}38954 \cdot 37{,}807}{983 \cdot 0{,}07549 \cdot 56{,}754}$, b) $\frac{3754 \cdot 45{,}786 \cdot 0{,}78394}{4573 \cdot 9{,}837 \cdot 0{,}34075}$.

52. a) $(1{,}3578)^5$, b) $(1{,}5097)^6$, c) $(1{,}4987)^7$, d) $(2{,}7359)^4$.

53. a) $\left(\frac{19}{13}\right)^{10}$, b) $\left(\frac{57}{41}\right)^8$, c) $\left(\frac{79}{53}\right)^7$, d) $\left(\frac{97}{75}\right)^9$.

54. a) $\left(\frac{5768}{4307}\right)^4$, b) $\left(\frac{0{,}30854}{0{,}16687}\right)^6$, c) $\left(\frac{7638}{4075}\right)^2$, d) $\left(\frac{0{,}75834}{0{,}47039}\right)^5$.

55. a) $\left(2\frac{17}{87}\right)^6$, b) $\left(1\frac{47}{97}\right)^7$, c) $\left(2\frac{8}{91}\right)^5$, d) $\left(1\frac{43}{137}\right)^8$.

56. a) $\sqrt[3]{9}$, b) $\sqrt[3]{9876}$, c) $\sqrt[3]{19}$, d) $\sqrt[3]{837}$.

57. a) $\sqrt{15}$, b) $\sqrt{8507}$, c) $\sqrt{738}$, d) $\sqrt{58076}$.

58. a) $\sqrt[7]{1000}$, b) $\sqrt[8]{93{,}768}$, c) $\sqrt[9]{100}$, d) $\sqrt[10]{876{,}39}$.

59. a) $\sqrt{0{,}764}$, b) $\sqrt{0{,}078549}$, c) $\sqrt{0{,}9876}$, d) $\sqrt{0{,}003879}$.

60. a) $\sqrt[3]{0{,}876}$, b) $\sqrt[3]{0{,}08395}$, c) $\sqrt[3]{0{,}2376}$, d) $\sqrt[3]{0{,}007934}$.

61. a) $\sqrt[4]{0{,}837}$, b) $\sqrt[5]{0{,}07365}$, c) $\sqrt[6]{0{,}008394}$, d) $\sqrt[7]{0{,}01769}$.

62. a) $\sqrt{\frac{73}{41}}$, b) $\sqrt[3]{\frac{789}{31}}$, c) $\sqrt{\frac{91}{17}}$, d) $\sqrt[3]{\frac{835}{59}}$.

63. a) $\sqrt{17\frac{5}{9}}$, b) $\sqrt[3]{627\frac{5}{6}}$, c) $\sqrt{23\frac{5}{11}}$, d) $\sqrt[3]{193\frac{5}{7}}$.

64. a) $\sqrt{\frac{83}{97}}$, b) $\sqrt[3]{\frac{973}{8745}}$, c) $\sqrt{\frac{197}{873}}$, d) $\sqrt[3]{\frac{573}{1768}}$.

65. a) $\sqrt[4]{\frac{7}{9873}}$, b) $\sqrt[6]{\frac{8}{3769}}$, c) $\sqrt[5]{\frac{19}{89057}}$, d) $\sqrt[7]{\frac{27}{98471}}$.

66. a) $(0{,}7428737)^{1,2}$, b) $(0{,}6894191)^{0,6}$.

67. a) $(0{,}6942832)^{1,4}$, b) $(0{,}8602648)^{0,7}$.

68. a) $73{,}845 \cdot \sqrt{0{,}0970093}$, b) $37{,}468 \cdot \sqrt[3]{0{,}887005}$.

69. a) $78{,}9466 \cdot \sqrt[3]{0{,}8574}$, b) $45{,}6372 \cdot \sqrt{0{,}6573}$.

70. a) $\frac{\sqrt{3{,}8057}}{0{,}59463}$, b) $\frac{\sqrt{8{,}376}}{0{,}5788264}$, c) $\frac{\sqrt{5{,}6047}}{0{,}73058}$, d) $\frac{\sqrt[3]{7{,}6805}}{0{,}6576708}$.

71. a) $\frac{9807}{2908} \cdot \left(\frac{0{,}7873}{0{,}9175}\right)^3$, b) $\frac{38075}{83746} \cdot \left(\frac{0{,}0857}{0{,}0683}\right)^5$.

72. a) $\frac{85{,}39\sqrt{45}}{708{,}73}$, b) $\frac{0{,}8948\sqrt[3]{83}}{6{,}0895}$.

73. a) $\frac{3{,}8497\sqrt[3]{100}}{0{,}7308}$, b) $\frac{0{,}80947\sqrt{10}}{0{,}23095}$.

Vermischte Aufgaben.

74. $\sqrt[n]{2}$ für $n = 2, 3, 4 \ldots 10$.

75. $\sqrt[n]{3}$ für $n = 2, 3, 4 \ldots 10$.

76. $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ für $n = 2, 3, 4 \ldots 10$.

77. $\sqrt[n]{\frac{1}{3}}$ für $n = 2, 3, 4 \ldots 10$.

78. Untersuche an der Hand der Ergebnisse von Aufg. 74—77, wie sich der Wert der Wurzel a) aus einer Zahl > 1, b) aus einer positiven Zahl < 1 ändert, wenn der Wurzelexponent steigt. (Beweis?)

79. Wie groß ist $\sqrt{a^2 - b^2}$, wenn a) $a = 6{,}369$ und $b = 5{,}321$, b) $a = 0{,}8460$ und $b = 0{,}6824$ ist?

80. Wie groß ist $\sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ für $p = 0{,}471$ und $q = 0{,}399$?

81. Wie groß ist $\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}$ für $a = 273{,}86$ und $b = 194{,}78$?

82. Wie groß ist $\sqrt{a^2 + b^2}$, wenn $a = 3{,}768$ und $b = 2{,}391$ ist?

83. Wie groß ist $\sqrt[3]{a^2 + b^2}$, wenn $a = 780{,}9$ und $b = 473{,}6$ ist?

84. Wie groß ist $\sqrt{a^3 + b^3}$, wenn $a = 83{,}46$ und $b = 67{,}91$ ist?

85. Wie groß ist $\sqrt{a^3 - b^3}$, wenn a) $a = 7{,}831$ und $b = 4{,}392$, b) $a = 18{,}74$ und $b = 17{,}91$ ist?

86. Wie groß ist $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$, für $a = 28{,}51$ und $b = 13{,}83$?

87. Wie groß ist $\sqrt[3]{a^3 - b^3}$ für $a = 384{,}7$ und $b = 305{,}4$?

88. Berechne $\sqrt{1 + \frac{ac}{b^2}}$ a) für $a = 4{,}838$, $b = 5{,}704$, $c = 9{,}368$, b) für $a = 48{,}71$, $b = 91{,}72$, $c = 63{,}47$.

89. Wie groß ist $\sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}}$ a) für $a = 28{,}37$, $b = 39{,}83$, $c = 41{,}50$, b) für $a = 173{,}5$, $b = 375{,}4$, $c = 280{,}2$?

90. Die quadratische Gleichung $ax^2 - 2bx + c = 0$ hat die Wurzeln $x_{1,2} = \frac{b}{a} \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}}$. Hier ist zunächst $\frac{ac}{b^2}$ logarithmisch zu berechnen; dann sind beide Teile von $x_{1,2}$ zu berechnen. Was erhält man

a) für $a = 237{,}1$, $b = 349{,}4$ und $c = -193{,}2$,
b) für $a = 41{,}78$, $b = 53{,}83$ und $c = -93{,}59$,
c) für $a = 1{,}835$, $b = 7{,}494$, $c = 9{,}876$?[1])

Exponentialgleichungen.

Löse die folgenden Exponentialgleichungen:

91. $a^x = b$.
92. $\sqrt[x]{a} = mn$.
93. $a^x \cdot b^{mx} = c$.
94. $a^{n-x} = nb^x$.
95. $a^{mx-p} = b^{nx-q}$.
96. $a^{3x-2} \cdot b^{2x-3} = c^{4x-5}$.
97. $10^x = 3$.
98. $100^x = 0{,}005736$.
99. $1000^x = 0{,}093768$.
100. $2^x = 10$.
101. $7^x = 100$.
102. $0{,}025229^x = 1000$.
103. $3{,}111^x = 1{,}7497$.
104. $2{,}506184^x = 10$.
105. $10^x = 1{,}3713^{10}$.
106. $(1{,}04952^x)^{1{,}05} = (100^{1{,}05})^{1{,}0952}$
107. $10^{4x} = 5{,}7544$.
108. $5{,}188^x = 88238$.
109. $7{,}8886^x = 9{,}92126$.
110. $1428{,}57^x = 0{,}0007$.

Aufgaben zum Rechnen mit dem Rechenschieber.[2])

111. a) 7^2, b) 15^2, c) 17^2, d) 23^2.
112. a) $1{,}34^2$, b) $7{,}86^2$, c) $12{,}3^2$, d) $18{,}1^2$.
113. a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{11}$, c) $\sqrt{18}$, d) $\sqrt{85}$.
114. a) $\sqrt{3{,}5}$, b) $\sqrt{17{,}4}$, c) $\sqrt{65{,}8}$, d) $\sqrt{26{,}9}$.
115. a) $2{,}3 \cdot 4{,}5$, b) $23 \cdot 35$. c) $7{,}4 \cdot 6{,}9$, d) $5{,}3 \cdot 0{,}75$.
116. a) $2{,}25 \cdot 5{,}7$, b) $13{,}2 \cdot 17{,}5$, c) $8{,}18 \cdot 16{,}5$, d) $425 \cdot 316$.
117. a) $1{,}26 \cdot 7{,}36 \cdot 1{,}3$, b) $1{,}31 \cdot 1{,}62 \cdot 3{,}84$, c) $579 \cdot 6{,}4 \cdot 14{,}4$.
118. a) $16{,}2 : 3{,}1$, b) $87{,}5 : 5{,}6$, c) $8710 : 78$, d) $123 : 17{,}5$.
119. a) $3{,}45 : 11{,}3$, b) $32{,}8 : 189$, c) $315 : 0{,}78$, d) $22{,}5 : 813$.
120. a) $\frac{213 \cdot 828}{314}$, b) $\frac{3{,}14 \cdot 33^2}{1{,}33}$, c) $\frac{3{,}14 \cdot 5{,}8 \cdot 22^2}{66}$.
121. a) $\sqrt{\frac{77}{12}}$, b) $\sqrt{\frac{14^2}{3{,}14}}$, c) $\sqrt{\frac{17{,}3 \cdot 2{,}45}{3{,}14}}$.

***122.** Ein Rechenschieber hat eine Länge von 25 cm; er trage eine logarithmische Skala von 1 bis 10. Wieviel mm vom Anfangspunkt ist a) die Zahl 2, b) die Zahl 3, ... h) die Zahl 9 einzutragen?

---

1) Berechne die Wurzeln der Gleichungen 2. Grades § 37 Aufg. 109—115 logarithmisch.
2) Es sind nur einige Aufgaben zur Einübung des Verfahrens gegeben. Weiteres Aufgabenmaterial liefern die Aufgaben 42 bis 73 dieses Paragraphen.

Eingekleidete Aufgaben[1]**.**

123. Wieviel wiegt die Luft in einem Saale von 17,5 m Länge, 13,2 m Breite und 7,35 m Höhe? Das spezifische Gewicht der Luft ist 0,001293.

124. Es soll ein Globus hergestellt werden, dessen Oberfläche 1 m^2 ist. Wie groß muß man den Radius nehmen?

125. Wie groß ist der Durchmesser eines 1500 m^3 fassenden Luftballons, wie groß seine Oberfläche?

126. Wie groß ist der theoretische Auftrieb (ohne Berücksichtigung von Ballonhülle, Korb usw.) eines Luftballons von 8,35 m Durchmesser, der mit Wasserstoff prall gefüllt ist? (Spezifisches Gewicht der Luft 0,001293, spezifisches Gewicht des Wasserstoffes 0,0000900.)

127. Wieviel wiegt die Steinmasse der Cheopspyramide, wenn das spezifische Gewicht des Steines, aus dem sie gebaut ist, zu 2,75 angenommen wird? Die Höhe der Pyramide ist 148 m, die Seite der quadratischen Grundfläche 233 m.

128. Wie groß wäre der Radius einer Goldkugel, deren Wert eine Milliarde Mark betrüge. Die Kugel möge aus der bei unseren Münzen vorgeschriebenen Legierung hergestellt sein. Ein Zwanzigmarkstück wiegt 7,965 g.

129. Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist der Quotient $\frac{a^3}{U^2}$, worin a den mittleren Radius der Bahn um die Sonne, U die Umlaufszeit bedeutet, angenähert eine Konstante. Bestimme den Quotienten für die folgenden Planeten und gib die Abweichungen vom mittleren Werte an. Als Maßeinheit für a ist der Radius der Erdbahn, als Maßeinheit für die Umlaufszeit der Tag genommen:

Planet	a	U
Merkur	0,3871	87,969
Venus	0,7233	224,701
Erde	1	365,256
Mars	1,5237	686,980
Pallas	2,770	1684
Jupiter	5,2028	4332,59
Saturn	9,5388	10759,20
Uranus	19,1910	30685,93
Neptun	30,0707	60187,65

130. Die Loschmidtsche Zahl $n = 28 \cdot 10^{18}$ gibt an, aus wieviel Molekülen 1 ccm Gas bei einem Druck von einer Atmosphäre und 0 Grad besteht. Das Gas möge so verdünnt werden, daß der Menge, die sich in dem Kubikzentimeter befindet, eine Kugel zur Verfügung gestellt wird, deren Radius gleich dem mittleren Halbmesser der Erdbahn ($r = 149000000$ km) ist. Welchen durchschnittlichen Abstand haben die Moleküle in dem so verdünnten Gase?

***131.** Decke folgenden Trugschluß auf: Es ist $3 > 2$ und $\log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2}$. Durch Multiplikation erhält man $3 \cdot \log \frac{1}{2} > 2 \cdot \log \frac{1}{2}$ oder $\log (\frac{1}{2})^3 > \log (\frac{1}{2})^2$ d. h. $\log \frac{1}{8} > \log \frac{1}{4}$. Daraus würde $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$ folgen.

---

1) In den folgenden Aufgaben werden die Formeln für Oberfläche und Volumen der Kugel sowie für das Volumen des Quaders und der Pyramide vorausgesetzt.

Zwölftes Kapitel.

Arithmetische und geometrische Reihen[1].

§ 45. Arithmetische Reihen.

Begriffe der arithmetischen Reihe.

1. Das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe heiße a, die Differenz d. Welchen Wert hat das zweite Glied, das dritte, das siebente, das $k$te Glied?

2. Sind u, v, w drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Reihe, so ist $u - v = v - w$, also $v = \frac{u + w}{2}$. Wie kann man hiernach eine arithmetische Reihe definieren? (Benutze den Begriff des arithmetischen Mittels.)

3. a) Welche arithmetischen Reihen nennt man steigend, welche fallend? **b)** Wie sieht eine Reihe aus, bei der die Differenz d gleich 0 ist?

4. a) Das erste Glied einer arithmetischen Reihe sei 1, die Differenz 2, die Anzahl der Glieder 10. Wie heißt die Reihe? **b)** Berechne durch möglichst zweckmäßige Addition die Summe aller Glieder.

5. Die beiden ersten Glieder einer arithmetischen Reihe sind:

a) 1 und 2, **b)** 1 und 3,
c) 2 und 4, **d)** 1 und -1,
e) 1 und -2, **f)** -1 und $+1$,
g) $\frac{1}{2}$ und -1, **h)** $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{4}$,
i) 0,1 und $-0{,}2$, **k)** a und b.

Gib jeweilig die nächsten drei Glieder an.

6. In einem in Kahun, südlich von der Pyramide von Illahun, gefundenen Papyrusfragment, das in das zweite Jahrtausend vor Christo gehört, findet sich eine zehngliedrige arithmetische Reihe, deren erste Glieder $13\frac{3}{4}$ und $12\frac{11}{12}$ lauten. Wie heißen die anderen Glieder?

7. Das Anfangsglied einer Reihe ist 0, die Differenz 5, das letzte Glied 30. Wie heißt die Reihe, wieviele Glieder hat sie, und wie groß ist die Summe aller Glieder?

8. Beantworte dieselben Fragen wie in Aufgabe 7 für eine Reihe mit dem Anfangsglied -10, der Differenz 3, dem letzten Glied 17.

9. a—i) Gib eine graphische Veranschaulichung der in Aufgabe 5 a bis i angegebenen arithmetischen Reihen in der Weise, daß du im Punkte 1 der x-Achse das erste Glied, im Punkte 2 das zweite Glied, im Punkte 3 das dritte Glied usf. (genauer: soviel Maßeinheiten, als jedes Glied anzeigt) senkrecht aufträgst. Was läßt sich über die Lage der Endpunkte der die einzelnen Glieder der Reihe darstellenden Strecken sagen?

10. a) Das erste Glied einer Reihe ist 3, das siebente ist 6, **b)** das erste ist 1, das fünfte ist -5. Bestimme die Zwischenglieder arithmetisch und graphisch.

11. a) Was ändert sich an der Differenz einer Reihe, wenn man die Gliederfolge umkehrt? **b)** Wie ändert sich das graphische Bild der Reihe?

---

1) Ausführlichere Behandlung finden die Gegenstände dieses Kapitels in der Oberstufe.

Die Summe einer arithmetischen Reihe.

12. Eine Reihe, in der das Anfangsglied a, die Differenz d, das Endglied z heißt, soll in umgekehrter Folge geschrieben werden; wie heißt in der neuen Reihe das Anfangsglied, das zweite, das dritte, das $k$te Glied, das Endglied?

13. Man addiere in einer $n$gliedrigen arithmetischen Reihe das erste und $n$te Glied, dann das zweite und $(n-1)$te, allgemein das $k$te und $(n-k+1)$te Glied; welches Gesetz erkennt man?

14. Unter eine arithmetische Reihe schreibe man gliedweise die aus der ersten durch Umkehrung der Gliederfolge entstehende Reihe. **a)** Wie groß ist die Summe je zweier übereinanderstehenden Glieder? **b)** Wie kann man hiermit die Summe der Reihe, d. h. die Summe aller Glieder bis zum $n$ten Gliede bestimmen?

15. In welcher Weise kann man an der Hand der graphischen Veranschaulichung der arithmetischen Reihe den Wert der Summe ihrer Glieder durch den Flächeninhalt einer Figur veranschaulichen? Gib zu der in den Aufgaben 12 bis 14 gewonnenen arithmetischen Ableitung des Summenausdruckes die entsprechende geometrische Ableitung der Summenformel.

16. a) Leite an der Hand der Figur 33 das von Jamblichus (Anfang des 4. Jahrh. n. Chr.) gefundene Resultat ab, daß

$$1+2+3+\cdots+9+10+9+\cdots+3+2+1$$

gleich 10^2 ist (Die Punkte sind in Parallelen zu einer Diagonale zusammenzufassen).

Fig 33.

b) Stelle in gleicher Weise a^2 als Summe einer mit 1 beginnenden und wieder mit 1 aufhörenden Reihe dar.

17. a) Zeige an Fig. 33 dadurch, daß du erst einen Eckpunkt, dann die ihn umgebenden drei Punkte, dann wieder die diese umgebenden fünf Punkte usf. zusammenfaßt, daß

$$1+3+5+\cdots+19=10^2$$

ist. **b)** Zeige, daß sich allgemein jedes Quadrat einer ganzen Zahl als Summe einer mit 1 beginnenden Reihe der ungeraden Zahlen darstellen läßt. Wie heißt die letzte ungerade Zahl der Reihe?

18. Ist a das Anfangsglied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder, z das Endglied und s die Summe der Reihe, so gelten die Formeln:

$$\textbf{I.}\quad z=a+(n-1)d,$$

$$\textbf{II.}\quad s=\frac{(a+z)n}{2},$$

$$\textbf{III.}\quad s=an+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot d.$$

Leite die dritte der vorstehenden Formeln aus den Grundformeln I und II her.

19. Stelle für die Summe der Reihe eine Formel auf, in der die Anzahl der Glieder, die Differenz und das Endglied (n, d, z) vorkommen, und leite diese Formel auf doppelte Weise aus zwei der Formeln I, II und III der Aufgabe 18 her.

20. Wieviel Größen sind notwendig und hinreichend, um eine arithmetische Reihe vollständig zu bestimmen? (Grund!)

Von einer arithmetischen Reihe[1]) sind

	gegeben	gesucht		gegeben	gesucht
21.	n, z, s	a, d	**26.**	a, n, s	d, z
22.	d, z, s	a, n	**27.**	a, n, z	d, s
23.	d, n, s	a, z	**28.**	a, d, s	n, z
24.	d, n, z	a, s	**29.**	a, d, z	n, s
25.	a, z, s	d, n	**30.**	a, d, n	z, s

31. Warum führen Aufgabe 22 und 28 auf quadratische Gleichungen? (Achte auf die Grundformel II.) Warum genügt es zu wissen, daß Aufgabe 22 auf eine quadratische Gleichung führt, um schließen zu können, daß dies auch bei Aufgabe 28 zutrifft? (Achte auf die Gleichberechtigung von a und z; Umkehrbarkeit einer Reihe.)

Beispiele.

32. Wie heißt die $n$te ungerade Zahl, und wie groß ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen? Beispiel $n = 20$.

33. Wie heißt die $n$te gerade Zahl (0 nicht mitgerechnet), und wie groß ist die Summe der ersten n geraden Zahlen? Beispiel $n = 24$.

34. Wie groß ist die Summe aller ganzen Zahlen **a)** von 1 bis 100, **b)** allgemein von 1 bis n?

35. Wie groß ist die Summe aller ungeraden Zahlen von 13 bis 81?

36. Wie groß ist die Summe aller geraden Zahlen von 24 bis 98?

37. Wie groß ist die Summe aller durch 3 teilbaren Zahlen von 3 bis 99?

38. Wie groß ist die Summe aller durch 7 teilbaren Zahlen von 7 bis 343?

39. Wie groß ist die Summe aller durch p teilbaren Zahlen von p bis np?

40. Wie groß ist die Summe aller durch k teilbaren Zahlen von nk bis mk?

Betrachte in jeder der folgenden Aufgaben 41 bis 54 drei der Größen a, d, n, z, s als gegeben, die beiden anderen als gesucht. (Vgl. Aufgabe 21 bis 30.)

	a	d	n	z	s		a	d	n	z	s
41.	1	12	40	469	9400	**48.**	5	$-3\frac{1}{2}$	13	-37	-208
42.	2	3	17	50	442	**49.**	-4	$5\frac{1}{3}$	37	188	3404
43.	21	-5	17	-59	-323	**50.**	$-4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	20	100	955
44.	$-37\frac{1}{2}$	4	22	$46\frac{1}{2}$	99	**51.**	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	24	34	448
45.	29	$1\frac{1}{2}$	33	77	1749	**52.**	60	$-1\frac{1}{4}$	21	35	$997\frac{1}{2}$
46.	25	$-2\frac{1}{2}$	25	-35	-125	**53.**	5,2	0,4	43	22	584,8
47.	-19	$1\frac{1}{2}$	29	23	58	**54.**	2,3	1,3	19	25,7	266

1) Zahlenbeispiele hierzu wähle man aus Aufgabe 41 bis 54.

55. Zwischen je zwei Glieder der arithmetischen Reihe 1, 5, 9, 13 usw. sollen fünf Glieder so eingeschaltet werden, daß wieder eine arithmetische Reihe entsteht (Interpolation). **a)** Wie heißt die neue Reihe? **b)** Benutze die graphische Darstellung.

56. Zwischen je zwei Glieder der Reihe 2, 14, 26 usw. sollen sieben Glieder interpoliert werden. Wie heißen diese? (Graphische Darstellung!)

57. Das siebente Glied einer arithmetischen Reihe heißt 10. Das 17. Glied heißt 50. Wie heißt das erste Glied und die Differenz der Reihe? (**a)** Arithmetisch, **b)** graphisch zu lösen!)

58. Das elfte Glied einer arithmetischen Reihe heißt 47, das 19. Glied 75. Wie heißt das 283. Glied?

59. Zwei Reihen sind gegeben: Die eine hat das Anfangsglied 1 und als siebentes Glied 4, die andere hat als Anfangsglied 11 und als sechstes Glied 1. Bestimme graphisch, welches Glied beide Reihen gemeinsam haben (gemeinsam heißt ein in zwei Reihen vorkommendes Glied, das in beiden Reihen an gleicher Stelle steht).

60[1]). Wie groß ist die Anzahl der Glieder und das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied — 7, deren Differenz 3 und deren Summe 430 ist? (Andere Zahlenbeispiele sind aus der letzten Tabelle — Aufgabe 41 bis 54 — zu entnehmen.)

61[1]). Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist 97, die Differenz 3, die Summe 1612. Wie groß ist das erste Glied und die Anzahl der Glieder? (Andere Zahlenbeispiele sind aus der letzten Tabelle — Aufgabe 41 bis 54 — zu entnehmen.)

Eingekleidete Aufgaben.

62. Wieviel Schläge tut eine Uhr in 24 Stunden, **a)** wenn sie nur ganze Stunden schlägt, **b)** wenn sie auch $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ Stunden (durch 1, 2, 3 Schläge) anzeigt?

63. Ein Beamter erhält 2550 ℳ Gehalt und soll nach Ablauf jeden Jahres 30 ℳ Zulage, d. h. 30 ℳ mehr als im verflossenen Jahre erhalten. Wie hoch beläuft sich sein Gehalt im 25. Jahre und wieviel wird er in 25 Jahren überhaupt erhalten haben?

64. Ein Diener wird für einen Lohn von 120 ℳ gemietet, mit dem Bemerken, daß er jedes Jahr 9 ℳ Zulage erhalten soll, wenn sein Herr mit ihm zufrieden sei. Wie lange muß er bleiben, bis er jährlich 300 ℳ erhält, und wieviel hat er in der ganzen Zeit dann erhalten, einschließlich des Lohnes für das letzte Jahr?

65. Es wird ein Brunnen gegraben, dabei wird für das erste Meter 1 ℳ gezahlt, für jedes folgende immer 5 ₰ mehr als für das vorhergehende. Wieviel kostete die Ausgrabung des Brunnens, und wieviel das letzte Meter, wenn der Brunnen 81 m tief wurde?

66. Unter 16 Personen sollen 1000 ℳ in der Weise verteilt werden, daß jede folgende immer 5 ℳ mehr erhält als die vorhergehende. Wieviel erhält die erste und wieviel die letzte?

67. A macht mit B eine Wette. A will nach einem 6000 Schritt entfernten Orte hin- und zurückgehen, bevor B 200 Äpfel in einen Korb gesammelt hat. Die

1) Die Aufgaben 60 und 61 führen auf quadratische Gleichungen. Vgl. Aufgabe 31.

Äpfel sollen alle in einer Reihe liegen, jeder von dem andern einen Schritt entfernt, und sollen einzeln herangeholt und einzeln in den Korb gelegt werden. Der Korb steht beim ersten Apfel. A soll ebenso schnell gehen wie B. Wer gewinnt die Wette?

Aus dem Papyrus Rhind des Ahmes (um 1700 v. Chr.):

68. 10 Maß Getreide unter 10 Personen so zu verteilen, daß jede folgende Person $\frac{1}{8}$ Maß weniger erhält als die vorhergehende.

69. 100 Brote sollen an 5 Personen so verteilt werden, daß die Anteile eine arithmetische Reihe bilden und die beiden geringsten Anteile zusammen $\frac{1}{7}$ der Summe der drei anderen Anteile ausmachen.

Aus dem (indischen) Rechenbuche von Bakhshali (300 bis 400 n. Chr.?)

70. Ein Reisender legt am ersten Tage zwei (a_1) Wegeinheiten zurück, jeden folgenden Tag drei (d_1) mehr. Ein zweiter Reisender legt am ersten Tage drei (a_2) Wegeinheiten zurück, jeden folgenden Tag zwei (d_2) mehr. Wann holt der erste den zweiten ein?

§ 46. Geometrische Reihen.

Begriff der geometrischen Reihe.

1. Eine geometrische Reihe ist eine Reihe, bei welcher der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Dieser Quotient heißt der Quotient der Reihe. Wie groß ist der Quotient der Reihe

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162 \ldots ?$$

2. a) Es seien u, v, w drei aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Reihe; drücke v durch u und w aus. b) Wie kann man hiernach eine geometrische Reihe definieren? (Benutze den Begriff des geometrischen Mittels.)

3. Es sei a das Anfangsglied, q der Quotient einer geometrischen Reihe; wie lautet das zweite, das dritte, das sechste, das $n$te Glied?

4. a) Was ist eine steigende, was eine fallende geometrische Reihe? b) Wie ist eine Reihe beschaffen, bei der $q = 1$ ist, c) bei der $q = -1$ ist?

5. Wie ändert sich der Quotient einer Reihe, wenn man ihre Glieder in umgekehrter Folge schreibt?

6. Die beiden ersten Glieder einer Reihe sind:

a) 1 und 2; b) 1 und 3;
c) 2 und 4; d) 1 und -1;
e) 1 und -2; f) $\frac{1}{2}$ und 1;
g) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$; h) 3 und 4;
i) 1 und 0,1; k) a und b.

Gib jeweilig die drei nächsten Glieder und das $n$te Glied an.

7. Gib eine Veranschaulichung des Wachstums der Glieder einer geometrischen Reihe in der Weise, daß du im Punkte 1 der x-Achse das erste Glied, im Punkte 2 das zweite Glied usf (genauer: soviel Maßeinheiten, wie jedes Glied anzeigt) senkrecht aufträgst. Was läßt sich über die Lage der Endpunkte der die einzelnen Glieder der Reihe darstellenden Strecken sagen, wenn a) der Quotient > 1 (Aufgabe 6a,

b, c, f, h als Beispiel), **b)** der Quotient ein positiver echter Bruch (Aufgabe 6g und i als Beispiel), **c)** eine negative Zahl (Aufgabe 6e als Beispiel), **d)** -1 oder $+1$ ist (Aufgabe 6d)?

Die Summe einer geometrischen Reihe.

8. a) Welche neue Reihe erhält man dadurch, daß man alle Glieder der in Aufgabe 3 bezeichneten Reihe mit q multipliziert? **b)** Die Summe der ursprünglichen $n$gliedrigen Reihe heiße s, welchen Wert hat dann die Summe der vorstehend angegebenen neuen Reihe?

9. Welche Gleichung für s erhält man, wenn man die Summe der ursprünglichen Reihe von der Summe der durch die Multiplikation mit q gewonnenen Reihe abzieht?

10. Ist a das erste Glied einer geometrischen Reihe, q der Quotient, z das $n$te Glied und s die Summe aller Glieder bis zum $n$ten Glied, so gelten die folgenden Formeln:

$$\text{I. } z = a \cdot q^{n-1};$$

$$\text{II. } s = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q};$$

$$\text{III. } s = \frac{qz - a}{q - 1} = \frac{a - qz}{1 - q}.$$

a) Leite die Formel III aus den Grundformeln I und II her. **b)** Welche der Summenformeln II und III wird man für steigende, welche für fallende Reihen anwenden?

11. Wieviele Größen sind notwendig und hinreichend, um eine geometrische Reihe vollständig zu bestimmen? (Grund!)

Von einer geometrischen Reihe sind

	gegeben[1]	gesucht		gegeben	gesucht
12.	n, z, s	$a, q.$	**17.**	a, n, s	$q, z.$
13.	q, z, s	$a, n.$	**18.**	a, n, z	$q, s.$
14.	q, n, s	$a, z.$	**19.**	a, q, s	$n, z.$
15.	q, n, z	$a, s.$	**20.**	a, q, z	$n, s.$
16.	a, z, s	$q, n.$	**21.**	a, q, n	$z, s.$

Die Aufgaben 13 bis 16 und 18 bis 21 führen auf einfache algebraische oder Exponential-Gleichungen, dagegen die Aufgaben 12 und 17 auf höhere, mit elementaren Mitteln im allgemeinen nicht lösbare Gleichungen. Warum genügt es zu wissen, daß Aufgabe 12 auf eine höhere Gleichung führt, um dasselbe auch für Aufgabe 17 schließen zu können? (Achte auf die Gleichberechtigung von a und z; Umkehrbarkeit der Reihe!)

22. a) Zeige mit Hilfe der Formel II in Aufgabe 10 (was man sonst auch ohne weiteres erkennt), daß in der Reihe

$$a - a + a - a + a - a + \cdots$$

---

1) Zahlenbeispiele hierzu wähle man aus Aufgabe 23 bis 45.

die Summe aller Glieder bis zu einem Gliede mit geradem Stellenzeiger 0, dagegen bis zu einem ungeradstelligen Gliede *a* ist. b) Warum kann man für eine Reihe mit lauter gleichen Gliedern die Formel II nicht mehr anwenden?

Beispiele.

Betrachte in jeder der folgenden Aufgaben 23 bis 45 drei der Größen *a*, *q*, *n*, *z*, *s* als gegeben, die beiden anderen als gesucht. (Vgl. Aufgabe 12 bis 21 und die Bemerkungen betr. Aufgabe 12 und 17.)

	a	q	n	z	s
23.	2	3	15	9565938	14348906
24.	4	5	9	1562500	1953124
25.	1	7	9	5764801	6725601
26.	4	6	11	241864704	290237644
27.	1	— 2	19	262144	174763
28.	1	— 2	20	— 524288	— 349525
29.	32	$2\frac{1}{2}$	6	3125	5187
30.	512	$2\frac{1}{2}$	10	1953125	3254861
31.	$\frac{1}{9}$	3	10	2187	$3280\frac{4}{9}$
32.	$\frac{1}{64}$	2	13	64	$127\frac{63}{64}$
33.	2187	$\frac{2}{3}$	12	$25\frac{23}{81}$	$6510\frac{35}{81}$
34.	1024	$1\frac{1}{2}$	13	$132860\frac{1}{4}$	$396532\frac{3}{4}$
35.	2187	$1\frac{1}{3}$	10	$29127\frac{1}{9}$	$109947\frac{4}{9}$
36.	0,0256	— 2,5	8	— 15,625	— 11,1534
37.	0,0256	— 2,5	9	39,0625	27,9091
38.	6,25	0,4	7	0,0256	10,3996
39.	25600	0,5	13	6,25	51193,75
40.[1]	100	1,04	10	142,33	1200,61
41.[1]	500	0,6	17	0,14106	1249,79
42.[1]	100	$\frac{7}{8}$	31	1,8207	787,26
43.[1]	10	$\frac{131}{121}$	41	239,57	3017,39
44.[2]	2	1,22862	20	100	528,659
45.[2]	1	1,33352	25	1000	3995,310

1) Die Werte für *z* und *s* sind abgerundet.
2) Die Werte für *q* und *s* sind abgerundet.

Wie groß ist die Summe der geometrischen Reihen:

46. $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$.

47. $a^{10} + a^9 b + a^8 b^2 + \cdots + b^{10}$.

48. $a^7 - a^6 b + a^5 b^2 - a^4 b^3 + - \cdots - b^7$.

49. $a^{20} - a^{19} b + a^{18} b^2 - a^{17} b^3 + - \cdots + b^{20}$?

Interpolationen.

50. Zwischen je zwei Glieder der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8 usw. ist noch ein Glied einzuschalten, so daß wieder eine geometrische Reihe entsteht. Wie lautet die neue Reihe?

51. Zwischen 1 und 7 sollen 6 Zahlen eingeschaltet werden, so daß eine geometrische Reihe von 8 Gliedern entsteht. Welchen Wert hat der Quotient der Reihe?

52. Zwischen a und b sollen 7 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. Wie lautet diese Reihe?

53. Zwischen a und b sollen 5 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. Wie lautet diese Reihe?

54. Zwischen a und $2a$ sollen 11 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe entsteht. (Chromatische Tonleiter bei der gleichschwebenden Temperatur.)

Eingekleidete Aufgaben.

55.[1]) Nach dem Berichte des Historikers Jaq'ubi erbat sich der Erfinder des Schachspiels als Ehrengeschenk die Zahl der Weizenkörner, welche herauskommt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts 1 Korn legt, auf das zweite 2, auf das dritte 4 usw., auf jedes folgende der 64 Felder immer doppelt soviel als auf das vorhergehende. Das Wievielfache von ihrer wirklichen Größe müßte die Erdoberfläche haben, um diese Weizenmenge zu liefern, wenn man die Erde als eine vollkommene Kugel von 6370000 m Radius annimmt, deren Oberfläche ein einziges Weizenfeld vorzüglichster Art mit einem Ertrage von 40 hl auf das Hektar bildete, das hl zu 1600000 Körner gerechnet?

56. Jemand erzählt eine Neuigkeit zwei Bekannten, von diesen erzählt jeder es wieder zwei Bekannten usf. Man nehme an, daß das Weitererzählen jeweilig in der nächsten Viertelstunde geschieht, daß außerdem die Neuigkeit stets anderen Menschen, die von ihr noch nichts wissen, auf diese Weise mitgeteilt wird. Wann würden alle in Groß-London wohnenden sieben Millionen Einwohner die Neuigkeit wissen, wenn sie um 7 Uhr früh die Runde zu machen beginnt?

57. Durch die Spektralanalyse ist $\frac{1}{3000000}$ eines Milligramms Kochsalz noch mit Sicherheit nachweisbar. Wie winzig diese Menge ist, soll das folgende lehren: Von Steinsalz (spez. Gewicht 2,28) ist bei Zimmertemperatur 1 Gewichtsteil in 2,8 Gewichtsteilen löslich; von einer so konzentrierten Lösung nehme man 1 ccm (d. i. etwa einen halben Fingerhut voll) und mische dies mit 1 Liter reinen Wassers. Von der Mischung nehme man wieder 1 ccm und verdünne es noch einmal mit 1 Liter reinen Wassers. Prüfe, ob bei dieser Verdünnung ein Flüssigkeitströpfchen, das man zu etwa 1 cmm rechnen kann, die oben genannte Menge Salz enthält.

---

[1]) Vgl. § 24, Aufg. 30.

Wie oft müßte man die Verdünnung vornehmen, damit 1 ccm der Flüssigkeit ungefähr jene kleine Menge Salz enthielte?

58. Ein Spieler, der 1000 ℳ bei sich hat, setzt den zehnten Teil seiner Barschaft, verliert, setzt den zehnten Teil des ihm verbliebenen Geldes usf.; nachdem er fünfmal hintereinander verloren hat, setzt er seine gesamte Barschaft ein und gewinnt. Wieviel beträgt sein Gewinn, wenn die Bank den dreifachen Satz auszahlt?

59. Warum und wieviel muß ein Spieler, der seinen Einsatz jedesmal verdoppelt, schließlich gewinnen, wenn die Bank auch nur den einfachen Satz als Gewinn zahlt?

§ 47. Zinseszinsrechnung.

Die Grundformel.

1. a) Was bedeutet die Aussage: Ein Kapital ist zu 3% ausgeliehen? **b)** desgleichen zu $4\frac{1}{2}$%, **c)** zu p%?

2. Wieviel Zinsen bringen a Mark zu p% in einem Jahre?

3. Auf wieviel wächst ein Kapital a innerhalb eines Jahres bei p% Zinsen an?

4. Mit welchem Faktor hat man also das Kapital zu multiplizieren, um den Wert nach einjähriger Verzinsung zu erhalten?

5. Sprich die Antwort auf die vorige Frage noch einmal aus unter Benutzung der Abkürzung

$$1 + \frac{p}{100} = q$$

und der Bezeichnung **Zinsfaktor**.

6. Wie groß ist der Zinsfaktor q, wenn p gleich **a)** 4, **b)** 5, **c)** $5\frac{1}{4}$, **d)** $4\frac{3}{4}$, **e)** $4\frac{2}{3}$, **f)** $5\frac{1}{3}$, **g)** $4\frac{5}{6}$% ist?

7. Wie groß ist der Prozentsatz, wenn der Zinsfaktor q gleich **a)** 1,05, **b)** 1,06, **c)** 1,045, **d)** 1,0475, **e)** 1,0525, **f)** $1\frac{1}{20}$, **g)** $1\frac{1}{30}$, **h)** $1\frac{1}{24}$, **i)** $\frac{26}{25}$ ist?

8. Beweise, daß ein Kapital a zu p% nach Ablauf von n Jahren mit den Zinsen und Zinseszinsen auf

$$b = aq^n$$

angewachsen ist, wobei $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist.

9. Drücke nach der Formel in Aufgabe 8 **a)** a durch b, n und q, **b)** q durch b, a und n, **c)** n durch b, a und q aus.

10. Auf welche Summe wächst ein Kapital von 100 ℳ durch Hinzufügung der Zinsen und Zinseszinsen in 1, 2, 3, 4, ... 10 Jahren an bei **a)** 3%, **b)** $3\frac{1}{2}$%, **c)** 4%?

11. a—c) Stelle dieses Anwachsen (Aufgabe 10) graphisch dar unter Anwendung eines geeigneten Maßstabes und eines zweckmäßig gewählten Koordinatensystems (z. B. die Abszissenachse um 100 Einheiten nach unten verschoben gedacht).[1]

Beispiele.

12. Ein Kapital von 1500 ℳ ist zu 4% ausgeliehen. Zu welcher Summe wächst es mit den Zinsen und Zinseszinsen in 30 Jahren an?

13. Zu welcher Summe wächst ein Kapital von 3750 ℳ bei 5% in 20 Jahren an?

1) Vgl. Aufg. 1 bis 6 in § 43.

14. Ein Waldbestand vermehrt sich mehrere Jahre hindurch ständig um 4% im Jahre.[1]) Wieviel cbm Holz wird er nach 12 Jahren liefern, wenn er jetzt zu 2 Millionen cbm veranschlagt wird?

15. Zu welcher Summe wäre ein Pfennig von Christi Geburt an bis zum Ende des Jahres 1900 angewachsen, wenn es möglich wäre, daß sein Wert sich alljährlich um 4% des jeweiligen Betrages vermehrt hätte? Der Wert ist in Erdkugeln von reinem Gold anzugeben, es ist dabei das kg Gold zu 2800 ℳ zu rechnen; das spezifische Gewicht des Goldes ist 19,25, der mittlere Erdradius beträgt 6370 km.

16. Bringt ein Kapital in 10 Jahren zu 4% mehr Zinsen und Zinseszinsen oder dasselbe Kapital in 4 Jahren zu 10%?

17. Zu welcher Summe wachsen 25300 ℳ in 10 Jahren an, wenn die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen und halbjährlich $2\frac{1}{2}$% gerechnet werden?

18. In der Satzung einer Sparkasse, die 3% Zinsen gewährt, steht die Bestimmung, daß der Betrag eines eingehenden Sparkassenbuches nach Zuschrift der Zinsen ohne Zinsverlust in ein anderes Buch übergeschrieben werden kann. Das nützt jemand in folgender Weise aus: Er hebt sein 12000 ℳ betragendes Kapital 6 Monate nach der Einzahlung ab und läßt es dann mit den inzwischen aufgelaufenen Zinsen in ein neues Sparkassenbuch übertragen. **a)** Wieviel mehr Jahreszinsen erhält er auf diese Weise, als wenn er das Geld in dem ersten Buche 1 Jahr lang hätte stehen lassen? **b)** Wieviel gewinnt er bei dem Manöver, wenn er alle drei Monate die Überschreibung vornehmen läßt?

19. Wie groß ist der Zuwachs von 1000 ℳ in 10 Jahren bei **a)** 6% jährlich, **b)** 3% halbjährlich, **c)** $1\frac{1}{2}$% vierteljährlich, **d)** $\frac{1}{2}$% monatlich, wenn die Zinsen **a)** jährlich, **b)** halbjährlich, **c)** vierteljährlich, **d)** monatlich zum Kapital gerechnet werden?

20. Ein Kapital, das zu 4% stand, wuchs in 22 Jahren zu 17000 ℳ an. Wie groß war es?

21. Welches Kapital wächst in 30 Jahren bei $4\frac{1}{2}$% zu 30000 ℳ an?

22. Welches Kapital wächst bei $4\frac{1}{2}$% in 10 Jahren zu derselben Summe an, zu der 8549 ℳ bei 5% in 7 Jahren anwachsen?

23. Welche Verzinsung für ein ganzes Jahr ergibt sich, wenn am Ende eines jeden Monats $\frac{1}{2}$% an Zinsen zum Kapital geschlagen wird?

24. Zu wieviel Prozent steht ein Kapital, das sich in 20 Jahren verdreifacht?

25. Zu wieviel Prozent steht ein Kapital, das sich in 30 Jahren verfünffacht?

26. Ein Wucherer lieh jemand 700 ℳ und ließ sich dafür einen Wechsel auf 1000 ℳ, nach drei Jahren zahlbar, ausstellen. Auf welche Verzinsung läuft das hinaus?

27. A leiht B 25 ℳ auf 2 Jahre gegen Zins und Zinseszins. Nach 2 Jahren zahlt B dem A außer der Schuld 24 ℳ zurück. Wieviel Prozent waren gerechnet? (Aus Widmanns Rechenbuch, 1489.)

28. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei 3prozentiger Verzinsung?

---

1) Die Vermehrung des Waldbestandes selbst geht natürlich stetig vorwärts, die Rechnungsabschlüsse dagegen erfolgen bei Gütern und Forstverwaltungen in jährlichen Zwischenräumen.

29[1]). Ein Erblasser vermacht einer Schule ein Kapital von 7500 ℳ mit der Bestimmung, daß die Zinsen der Stiftung zu Stipendienzwecken benutzt werden sollen, sobald das Kapital nebst den 4prozentigen Zinseszinsen auf 10000 ℳ angewachsen sein wird. Wann kann die Auszahlung der Stipendien beginnen?

30. Durch die Zeitungen ging im Sommer des Jahres 1912 die Nachricht, daß der Stadt Berlin 2000 ℳ vermacht worden seien mit der Bestimmung, daß die Zinsen und Zinseszinsen so lange zum Kapital geschlagen werden sollten, bis dieses den Betrag der städtischen Schulden erreicht hätte. Wie lange (ungefähr) müßte man darauf warten, wenn man auf 4% Zinsen rechnen dürfte und die jetzigen Schulden der Stadt Berlin (etwa 480 Millionen Mark) sich nicht wesentlich änderten?

31. Für ein Gut bietet A 600000 ℳ bar, B 696000 ℳ nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlbar, C 729000 ℳ nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlbar. Wer bot am meisten, wenn 5% und Zinseszinsen gerechnet werden, und wieviel bot er mehr als die beiden andern?

32. Das königliche Schloß zu Benrath bei Düsseldorf ist im Jahre 1911 von der Gemeinde Benrath für $1\frac{1}{2}$ Million Mark angekauft worden. Bei Abschluß des Kaufvertrages wurde vereinbart, daß der Kaufpreis in drei gleichen Raten von je 500000 ℳ gezahlt werden sollte, und zwar die erste nach einem Jahr ohne Zinsen, die zweite nach 3 Jahren mit dreiprozentigen Zinsen für 2 Jahre, die letzte nach 5 Jahren mit dreiprozentigen Zinsen für 4 Jahre. Wieviel hat die Gemeinde Benrath dem Kronfiskus insgesamt bar zu bezahlen, **a)** wenn einfache Zinsen gerechnet werden, **b)** desgleichen wenn Zinseszinsen gezahlt werden? **c)** Man vergleiche zu dem Zeitpunkt der letzten Zahlung den Wert der geleisteten Zahlungen (a und b) mit dem Werte, auf den die $1\frac{1}{2}$ Millionen Mark angewachsen wären, wenn sie bei Abschluß des Kaufvertrages voll ausbezahlt und 5 Jahre hindurch zu 3% auf Zinseszinsen gelegt worden wären.

33. Es will jemand eine Summe Geldes 20 Jahre hindurch auf Zinsen geben, um sich nach Ablauf der Zeit durch die Zinsen des erlangten Kapitals eine gewisse Einnahme zu sichern. Er rechnet auf 5%. Um den wievielten Teil muß er die Summe vermehren, wenn er nur 4% erhalten kann?

---

1) Es ist zu beachten, daß die Zinsen nicht stetig, sondern nur am Ende gewisser Zeiträume (z. B. eines ganzen oder halben Jahres) zum Kapital geschlagen werden, daß also die Formeln der Zinseszinsrechnung immer nur für ganzzahlige Vielfache solcher Zeiträume gelten. Für überschießende Bruchteile dieser Zeiträume ist die einfache Zinsrechnung anzuwenden. Das entspricht auch den Gepflogenheiten des Geschäftsverkehrs der Bankhäuser; bei diesen erfolgt die Hinzurechnung der Zinsen zum Kapital nur an bestimmten Tagen des Jahres, z B. am 1. Januar und am 1. Juli. Auf die kürzeren Zeiträume vor oder nach diesen Abrechnungsterminen wird die einfache Zinsrechnung angewandt.

Arithmetischer Leitfaden.

§ 1. Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen.

Die natürlichen Zahlen.

1. Unter den natürlichen Zahlen versteht man die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., deren Folge beliebig weit fortsetzbar ist. Geometrisch kann man diese Folge von Zahlen auf einem Zahlstrahl veranschaulichen, auf dem vom Anfangspunkt aus eine Einheit angegeben ist (Fig. 1).

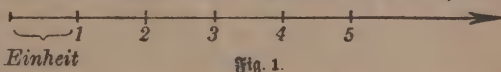


Fig. 1.

Begriff der Addition.

2. Die Addition ist eine Abkürzung des Weiterzählens. Die Aufgabe, von 7 um 3 weiterzuzählen, schreibt man kürzer 7 + 3. Allgemein heißt $a + b$, es soll von der natürlichen Zahl a um b weitergezählt und das Endergebnis angegeben werden. Am Zahlstrahl veranschaulicht bedeutet die Aufgabe $a + b$, daß von der Zahl a um b in der Richtung vom Anfangspunkt weg, also wenn der Zahlstrahl nach rechts gerichtet ist, in der Richtung nach rechts, fortgeschritten werden soll (Fig. 2).

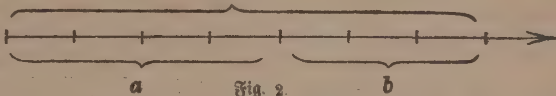


Fig. 2.

3. Das Ergebnis einer Addition heißt Summe; die Zahlen, die addiert werden, heißen Summanden.

4. Die Addition zweier natürlichen Zahlen ist stets ausführbar, d. h. man erhält als Ergebnis stets wieder eine natürliche Zahl.

5. Man kann auch eine Summe von mehr als zwei Summanden bilden. 7 + 3 + 5 heißt, es soll zu 7 erst 3 addiert werden und zum Ergebnis dann 5. Allgemein heißt z. B. $a + b + c + d + e$, es soll erst $a + b$ gebildet, zum Ergebnis c addiert werden, zum neuen Ergebnis d, dann wieder zum Ergebnis e.

Das kommutative Gesetz der Addition.

6. Das Ergebnis einer Additionsaufgabe ändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge der Summanden vertauscht. Es hat z. B. 7 + 3 das gleiche Ergebnis wie 3 + 7. Allgemein drückt man diese Tatsache in der Formel aus:

$$a + b = b + a,$$

wo a und b irgendwelche natürliche Zahlen bedeuten.

7. Auch bei einer Summe von mehreren Summanden ist deren Reihenfolge nicht maßgebend für das Ergebnis. In 7 + 3 + 5 kann man die Aufeinander-

folge der Summanden beliebig ändern, immer erhält man das Ergebnis 15. So gilt also z. B. für die Summe aus drei beliebigen natürlichen Zahlen a, b und c

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=c+a+b=c+b+a.$$

Begriff der Subtraktion.

8. Die **Subtraktion** ist die Abkürzung des Rückwärtszählens. Die Aufgabe, von 7 um 3 rückwärts zu zählen, schreibt man kürzer $7-3$. Allgemein heißt $a-b$, es soll von der natürlichen Zahl a um b rückwärts gezählt und das Endergebnis angegeben werden. Am Zahlstrahl veranschaulicht bedeutet die Aufgabe $a-b$, daß man von der Zahl a um b in der Richtung zum Anfangspunkt hin, also wenn der Zahlstrahl nach rechts gerichtet ist, in der Richtung nach links fortschreiten soll (Fig. 3).

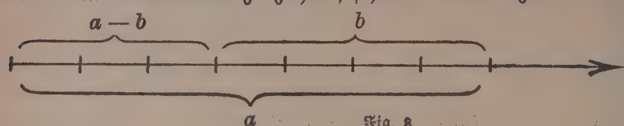


Fig. 3.

9. Das Ergebnis einer Subtraktion heißt **Differenz**, die Zahl, von der subtrahiert werden soll, heißt **Minuend**, die Zahl, die subtrahiert werden soll, heißt **Subtrahend**.

10. In der Additionsaufgabe $7+3=10$ sind die Zahlen 7 und 3, die Summanden, gegeben, die Summe ist gesucht. Man kann nun statt nach der Summe nach einem Summanden fragen, wenn die Summe und der andere Summand gegeben sind, also etwa in der oben erwähnten Aufgabe nach 3 fragen, wenn 10 und 7 als bekannt angesehen werden. Die Antwort auf diese Frage gibt die Subtraktionsaufgabe $10-7$. Allgemein ist $a-b$ die Zahl, die man um b vermehren muß, um a zu erhalten. Im Hinblick auf diesen Zusammenhang der Addition mit der Subtraktion bezeichnet man die Subtraktion auch als **Umkehrung** der Addition.

11. Eine Subtraktionsaufgabe $a-b$ ist nur dann ausführbar, wenn $a>b$ (lies a größer als b) ist. In der Tat läßt sich z. B. keine natürliche Zahl angeben, die Ergebnis einer Subtraktionsaufgabe $7-9$ wäre.

12. Bei der Subtraktion darf man nicht (wie bei der Addition die beiden Summanden) Minuend und Subtrahend vertauschen. Es ist $a-b$ durchaus verschieden von $b-a$; wenn die eine Aufgabe ausführbar ist, ist es die andere nicht.

Vertauschbarkeit von Addition und Subtraktion.

13. Statt $7+3-2$ kann ich auch, indem ich die Reihenfolge der Addition und Subtraktion vertausche, $7-2+3$ rechnen und komme beide Male zum gleichen Ergebnis. Allgemein ist

$$a+b-c=a-c+b.$$

Dabei ist freilich Voraussetzung, daß die Subtraktionen auch wirklich ausführbar sind, daß also $a>c$ ist.

Die in einem Ausdruck wie $a+b-c$ vorkommenden Summanden und Subtrahenden heißen **Glieder** des Ausdrucks.

Die vier Gesetze über die Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken.

14. Wenn im Rechnen ein **Klammerausdruck** vorkommt, so bedeutet das, der Inhalt der Klammer ist zuerst auszurechnen, danach erst ist die übrige Rechnung durchzuführen. So ist also zu rechnen:

(1) $12 + (3 + 2) = 12 + 5 = 17;$
(2) $12 + (3 - 2) = 12 + 1 = 13;$
(3) $12 - (3 + 2) = 12 - 5 = 7;$
(4) $12 - (3 - 2) = 12 - 1 = 11.$

15. Wenn statt der bestimmten Zahlen allgemeine vorliegen, dann versagt dieses Verfahren von Nr. 14. $m + (a + b)$ bedeutet, man soll zu m die Summe $a + b$ addieren; am Zahlstrahl heißt es, man soll von m aus um die Summe $a + b$ fortschreiten. Man kommt zum gleichen Ziel, wenn man erst um a und dann von der erreichten Zahl aus um b fortschreitet. Es ist also

(I) $$m + (a + b) = m + a + b.$$

Man addiert eine Summe, indem man die Summanden einzeln addiert.

$m + (a - b)$ bedeutet, man soll von m aus um die Differenz $a - b$ fortschreiten bzw. weiterzählen. Das kann man tun, indem man erst um a weiterzählt und dann, da man nur um $a - b$ weiterzählen sollte, also um b zu weit gegangen ist, wieder um b zurückzählt. Es ist

(II) $$m + (a - b) = m + a - b.$$

Man addiert eine Differenz, indem man den Minuenden addiert und den Subtrahenden subtrahiert.

Diese Formel hat eine Bedeutung nur dann, wenn $a > b$ ist.

$m - (a + b)$ bedeutet, man soll von m aus um die Summe $a + b$ zurückzählen. Das kann man ausführen, indem man erst um a, dann von dem erreichten Punkt aus noch um b zurückzählt. Das setzt allerdings voraus, daß $m > a + b$ ist. In Gestalt einer Formel heißt das

(III) $$m - (a + b) = m - a - b.$$

Man subtrahiert eine Summe, indem man die Summanden einzeln subtrahiert.

$m - (a - b)$ schließlich bedeutet, es soll von m aus um die Differenz $a - b$ zurückgezählt werden. Das ist natürlich nur möglich, wenn diese Differenz selbst vorhanden ist, wenn also $a > b$ ist, und wenn außerdem die Differenz kleiner als m ist. Man kann das Zurückzählen ausführen, indem man zunächst um a zurückzählt. Da man aber jetzt um b zuviel rückwärts gezählt hat, ist nachträglich um b vorwärtszuzählen. Das heißt:

(IV) $$m - (a - b) = m - a + b.$$

Man subtrahiert eine Differenz, indem man den Minuenden subtrahiert und den Subtrahenden addiert.

Wenn man auch in Nr. 14 unter Anwendung der hier entwickelten Gesetze (I) bis (IV) gerechnet hätte, würde man das gleiche Ergebnis erhalten haben wie vorher.

16. Die vier in Nr. 15 angegebenen Gesetze lassen sich dahin zusammenfassen: Steht vor einer Klammer ein +-Zeichen, so kann die Klammer ohne weiteres weggelassen werden. Steht aber vor der Klammer ein —-Zeichen, so sind die Vorzeichen der in der Klammer stehenden Größen umzukehren, so daß also aus einem Summanden oder Minuenden ein Subtrahend, aus einem Subtrahenden ein Summand wird.

17. In den vier Gesetzen von Nr. 15 standen in den Klammern Summen und Differenzen von nur zwei Größen. Die Gesetze lassen sich aber sofort auf drei- und mehrgliedrige Klammerausdrücke ausdehnen.

Begriff der Multiplikation.

18. Die Multiplikation ist eine Abkürzung der Addition gleicher Summanden. Die Aufgabe $7 + 7 + 7$ schreibt man kürzer $7 \cdot 3$. Allgemein heißt $a \cdot b$, wofür man oft auch ohne Einfügung des Multiplikationszeichens ab sagt, es soll eine Summe von b Summanden, von denen jeder a ist, gebildet werden. Am Zahlstrahl veranschaulicht bedeutet die Aufgabe ab, daß man vom Nullpunkt aus $b$mal jeweils um die Strecke a vorwärtsgehen soll (Fig. 4). Da es genau genommen eine Summe, die

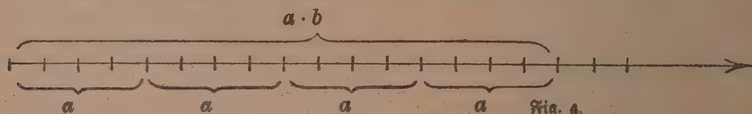


Fig. 4.

aus nur einem Summanden besteht, nicht gibt, hat nach unserer Erklärung das Produkt $a \cdot 1$ noch keine Bedeutung. Die Veranschaulichung am Zahlstrahl legt uns aber nahe, in diesem Falle eben nur einen Schritt von der Länge a zu machen und also $a \cdot 1 = a$ zu setzen.

19. Das Ergebnis einer Multiplikation heißt Produkt, die Zahl, die multipliziert wird, heißt Multiplikand, die Zahl, mit der multipliziert wird, heißt Multiplikator. Für Multiplikator und Multiplikand hat man auch den gemeinsamen Namen Faktor (vgl. Nr. 23).

20. Die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen ist stets ausführbar, d. h. man erhält als Ergebnis einer Multiplikation zweier natürlichen Zahlen stets eine natürliche Zahl.

21. Man kann auch ein Produkt von mehr als zwei Faktoren bilden. $7 \cdot 3 \cdot 2$ heißt, es soll erst 7 mit 3 multipliziert werden und das Ergebnis wieder mit 2. Allgemein bedeutet z. B. $a \cdot b \cdot c \cdot d$, daß a mit b, das Ergebnis mit c, das Ergebnis mit d multipliziert werden soll.

22. Sind die Faktoren eines Produktes gleich, so bedient man sich einer abgekürzten Schreibweise. Man schreibt die Anzahl der Faktoren etwas höher hinter den Faktor. Es bedeutet also z. B. 7^3 (gelesen: 7 hoch 3) das Produkt $7 \cdot 7 \cdot 7$ und a^4 das Produkt $a \cdot a \cdot a \cdot a$. Ein solcher Ausdruck heißt Potenz, der mehrmals auftretende Faktor heißt die Basis, die Anzahl der Faktoren heißt Exponent.

Das kommutative Gesetz der Multiplikation.

23. Das Ergebnis einer Multiplikation ändert sich nicht, wenn man die Faktoren vertauscht. Es hat z. B. $7 \cdot 3$ das gleiche Ergebnis wie $3 \cdot 7$. Allgemein ist

$$a \cdot b = b \cdot a.$$


Fig. 5.

Um diese Tatsache recht deutlich werden zu lassen, bedient man sich zweckmäßig einer neuen Darstellung des Produktes. Die rechteckig angeordnete Gruppe von Punkten in Fig. 5 stellt 3 Reihen von je 7 Punkten dar und ist so eine Veranschaulichung des Produktes $7 \cdot 3$. Sehe ich aber das Rechteck von der rechten oder der linken Seite an,

so habe ich 7 Reihen von 3 Punkten; dadurch wird das Produkt $3 \cdot 7$ dargestellt. Da kein Punkt weggenommen oder hinzugefügt ist, sind beide Produkte gleich. So kann man an einer Figur aus b Reihen von je a Punkten das eben angegebene Gesetz veranschaulichen.

24. Auch bei einem Produkt von mehreren Faktoren ist deren Reihenfolge nicht maßgebend für das Ergebnis. In $7 \cdot 3 \cdot 2$ kann man die Reihenfolge der Faktoren beliebig ändern, immer erhält man als Ergebnis 42. So gilt also z. B. für das Produkt aus drei beliebigen natürlichen Zahlen a, b und c

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$

Begriff der Division.

25. Die Division ist eine Abkürzung der Subtraktion gleicher Subtrahenden, wobei angegeben wird, wie oft die Subtraktion ausführbar ist. $28 : 4$ bedeutet, es soll von 28 so oft als möglich 4 subtrahiert und angegeben werden, wie oft das möglich ist. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Einmal kann die letzte Subtraktion restlos ausgeführt werden, etwa bei der eben genannten Aufgabe. Andererseits kann aber auch ein Rest bleiben. Am Zahlstrahl veranschaulicht bedeutet die Aufgabe $a : b$, man soll von a aus rückwärtsgehend feststellen, wieviele Schritte von der Länge b man machen kann.

26. Genau so wie wir die Subtraktion einmal als Abkürzung des Rückwärtszählens, dann aber auch als Umkehrung der Addition ansprechen konnten, können wir auch für die Erklärung der Division die Umkehrung der Multiplikation heranziehen. Während bei der Multiplikation $3 \cdot 7 = 21$ die Faktoren 3 und 7 gegeben sind, das Produkt 21 aber errechnet werden soll, kann man auch nach einem der Faktoren, etwa 3, fragen, während 7 und 21 gegeben sind. Die Aufgabe, die auf diese Frage antwortet, schreibt man $21 : 7 = 3$. Man kommt auf eine Divisionsaufgabe. Allgemein ist also $a : b$ die Zahl, die mit b multipliziert a ergibt. Man wird deshalb auch die Division als Umkehrung der Multiplikation erklären.

Diese Tatsache wird benutzt, wenn man die Probe auf die Division macht. $117 : 9 = 13$ ist richtig, weil $117 = 13 \cdot 9$ ist. $a : b = c$ ist richtig, wenn $a = c \cdot b$ ist.

Addition und Subtraktion faßt man als Rechenoperationen erster Stufe zusammen und stellt sie den beiden Rechenoperationen zweiter Stufe, der Multiplikation und Division, gegenüber, weil diese auf der Grundlage der Addition und Subtraktion ausgeführt werden.

27. Das Ergebnis einer Division nennt man Quotient, die Zahl, die dividiert wird, heißt Dividend, die Zahl, durch die dividiert wird, heißt Divisor.

28. Die Division zweier natürlichen Zahlen ist nicht immer restlos ausführbar, vielmehr nur dann, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Die Ausdrücke der Form $a : b$ haben daher, wenn wir von der Division mit Rest absehen, im Bereiche der natürlichen Zahlen nur in dem Falle eine Bedeutung, wenn die Division ausführbar ist.

29. Das kommutative Gesetz gilt für die Division nicht.

Vertauschbarkeit von Multiplikation und Division.

30. Statt $(28 \cdot 3) : 7$ kann ich $(28 : 7) \cdot 3$ rechnen. Allgemein ist

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b,$$

vorausgesetzt, daß die Division $a : c$ überhaupt ausführbar ist. **Man kann ein Produkt durch eine Zahl dividieren, indem man einen der Faktoren durch die Zahl dividiert.**

Es ist zu beachten, daß nicht etwa $(a : c) \cdot b$ und $a : (c \cdot b)$, wo b von 1 verschieden ist, gleich sind.

Die Gesetze über die Multiplikation von Klammerausdrücken.

31. Wenn irgendein rechnerischer Ausdruck ohne Klammern in bestimmten Zahlen, etwa $7 + 3 \cdot 2 - 12 : 4 - 2$, vorliegt, so führt man in ihm vorweg die Multiplikationen und Divisionen aus, dann erst die Additionen und Subtraktionen. Hier also ist erst $3 \cdot 2$ und $12 : 4$ auszurechnen, dann erst ist $7 + 6 - 3 - 2$ zu bilden. Die Rechenoperationen zweiter Stufe gehen den Rechenoperationen erster Stufe voran.

32. Aus der Grundregel für die Verwendung von Klammern im Rechnen ergibt sich bei Produkten aus Klammergrößen

(1) $$(24 + 12) \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216;$$

(2) $$(24 - 12) \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72.$$

Auch hier aber kommen wir mit dieser Rechenvorschrift nicht aus, wenn an Stelle der bestimmten Zahlen Buchstabenausdrücke stehen.

33. Wie bei den allgemeinen Zahlen die Klammern zu beseitigen sind, ergibt sich aus der Erklärung des Produktes. $(a + b) \cdot m$ bedeutet eine Summe aus m Summanden $a + b$. Es ist also

$$(a+b)m = \underbrace{(a+b) + (a+b) + \cdots + (a+b)}_{m \text{ Summanden}}$$
$$= a + b + a + b + \cdots + a + b$$
$$= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ Summanden}} + \underbrace{b + b + \cdots + b}_{m \text{ Summanden}}$$

(I) $$(a+b)m = am + bm.$$

Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert und die Produkte addiert.

Ebenso ergibt sich

$$(a-b)m = \underbrace{(a-b) + (a-b) + \cdots + (a-b)}_{m \text{ Summanden}}$$
$$= a - b + a - b + \cdots + a - b$$
$$= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ Summanden}} - \underbrace{b - b - \cdots - b}_{m \text{ Summanden}}$$

(II) $$(a-b)m = am - bm.$$

Man multipliziert eine Differenz mit einer Zahl, indem man Minuend und Subtrahend mit der Zahl multipliziert und das letzte Produkt vom ersten subtrahiert.

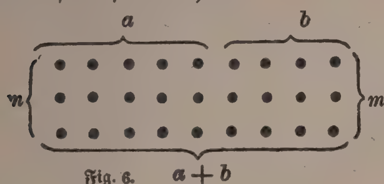


Fig. 6.

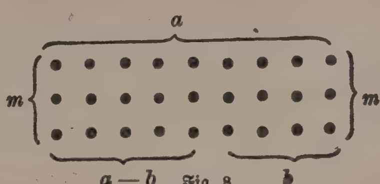


Fig. 8.

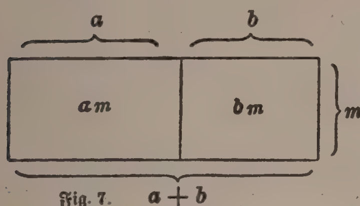


Fig. 7.

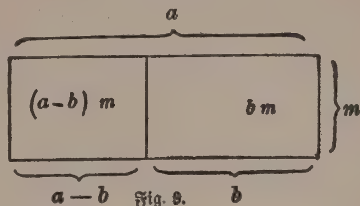


Fig. 9.

34. Eine geometrische Veranschaulichung der beiden Gesetze in Nr. 33 zeigen die Figuren 6 bis 9. In Fig. 6 und 7 ist die Summe $a + b$ mit m, in Fig. 8 und 9 die Differenz $a - b$ mit m multipliziert worden.

35. Setzt man in der Formel (I) der Nr. 33 für m die Summe $(c + d)$ ein, so erhält man

$$(a+b)\cdot(c+d) = (c+d)\cdot a + (c+d)\cdot b,$$

und wenn man rechts abermals die Formel (I) anwendet:

(I) $$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Setzt man hingegen in jene Formel für m die Differenz $c - d$ ein, so erhält man zunächst

$$(a+b)\cdot(c-d) = (c-d)\,a + (c-d)\,b,$$

und wenn man jetzt die Formel (II) von Nr. 33 anwendet

(II) $$(a+b)\cdot(c-d) = ac - ad + bc - bd.$$

Ebenso erhält man, wenn man in der Formel (II) von Nr. 33 an Stelle von m erst die Summe $c + d$, dann die Differenz $c - d$ einsetzt, die Formeln:

(III) $$(a-b)\,(c+d) = ac + ad - bc - bd,$$

(IV) $$(a-b)\,(c-d) = ac - ad - bc + bd.$$

In allen diesen Formeln ist immer vorausgesetzt, daß die auftretenden Differenzen wirklich im Bereiche der natürlichen Zahlen ausführbar sind.

Fig. 10 gibt eine geometrische Veranschaulichung der ersten dieser Formeln. In gleicher Weise lassen sich auch die anderen drei Formeln veranschaulichen.

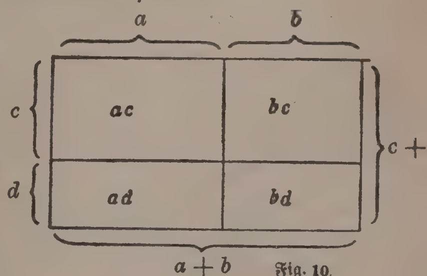


Fig. 10.

36. Von praktischer Bedeutung sind einige

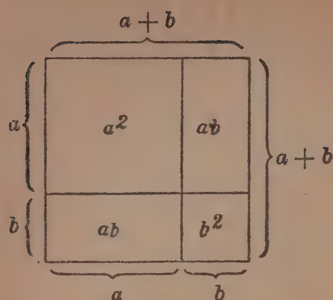


Fig. 11.

Formeln, die aus den in Nr. 35 abgeleiteten dadurch hervorgehen, daß man besondere Werte einsetzt. Setzt man in der Formel (I) $a = c$, $b = d$, so erhält man (vgl. Nr. 22)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Das Quadrat einer zweigliedrigen Summe ist gleich der Summe aus den Quadraten der Summanden und dem doppelten Produkt der Summanden.

Fig. 11 gibt eine geometrische Veranschaulichung für diese Formel.

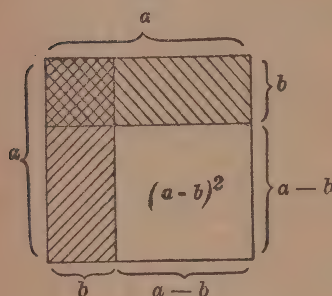


Fig. 12.

Setzt man die gleichen Werte in die Formel (IV) ein, so erhält man

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Das Quadrat einer Differenz ist gleich der Differenz, die entsteht, wenn man die Summe der Quadrate von Minuend und Subtrahend um das doppelte Produkt aus Minuend und Subtrahend vermindert.

Fig. 12 erläutert diese Formel geometrisch.

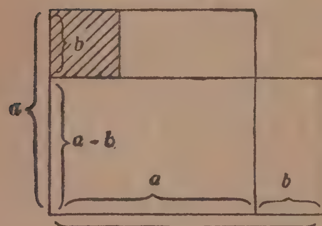


Fig. 13.

Führt man schließlich die gleichen Werte in die Formel (II) ein, so erhält man

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Zahlen.

Eine geometrische Veranschaulichung für diese Formel gibt Fig. 13.

Die Gesetze über die Division von Klammerausdrücken.

37. Aus der Bedeutung der Klammern beim Rechnen mit bestimmten Zahlen ergibt sich

(1) $$(24 + 12) : 6 = 36 : 6 = 6;$$

(2) $$(24 - 12) : 6 = 12 : 6 = 2.$$

Um die allgemeine Formel

(I) $$(a + b) : m = a : m + b : m$$

herzuleiten, kann man die Erklärung der Division als Umkehrung der Multiplikation benutzen. Die Formel ist richtig, wenn

$$(a + b) = (a : m + b : m) \cdot m$$

richtig ist (Nr. 26). Wende ich auf der rechten Seite die erste Grundformel für die Multiplikation von Klammerausdrücken (Nr. 33) an, so erhalte ich

$$a + b = (a:m) \cdot m + (b:m) \cdot m,$$

und hier steht in der Tat auch auf der rechten Seite $a + b$.

Genau so läßt sich die zweite Grundformel für die Division von Klammerausdrücken beweisen:

(II) $$(a - b) : m = a : m - b : m.$$

Hier wird wieder vorausgesetzt, daß $a > b$ ist, und in beiden Formeln außerdem, daß die Division im Bereiche der natürlichen Zahlen ausführbar ist.

§ 2. Die vier Grundrechenarten mit relativen Zahlen.

Die Zahl Null und die relativen Zahlen.

1. Wenn bei verschiedenen Grundgesetzen in § 1, z. B. in Nr. 13 und 15, immer eine oder mehrere Nebenbedingungen erfüllt sein mußten, so lag das daran, daß die Subtraktion $a - b$ im Bereiche der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar ist, dann nämlich nicht, wenn $a < b$ ist. Genau genommen hätte auch immer noch der Fall $a = b$ ausdrücklich ausgeschlossen werden müssen. Um sich von diesen Einschränkungen frei zu machen, führt man neue Zahlen ein, die zu den natürlichen Zahlen hinzukommen, die Null und die negativen Zahlen.

Die Null führt man ein, damit die Rechenoperation $a - b$ auch dann noch ausführbar ist, wenn $a = b$ ist. Bei der Veranschaulichung der Zahlen auf dem Zahlstrahl wird die Zahl 0 durch den Anfangspunkt dargestellt. Er heißt daher auch Nullpunkt. Um die negativen Zahlen zu verzeichnen, geht man über den Nullpunkt hinaus und kommt so schrittweise zu (-1), (-2), (-3) usf., wie man es z. B. an der Skala eines Thermometers sieht. Aus dem Zahlstrahl wird damit eine beiderseits beliebig fortzusetzende Zahlgerade (Fig. 14).

(−3) (−2) (−1) 0 (+1) (+2) (+3) (+4)

Fig. 14.

2. Nach Einführung dieser negativen Zahlen ist es immer möglich, von irgendeiner natürlichen Zahl a aus um die natürliche Zahl b rückwärts zu zählen. Wir bezeichnen die Zahlen vor der Hand mit (-1), (-5), allgemein mit $(-a)$. Zum Unterschied davon wollen wir die bisherigen natürlichen Zahlen, die positiven Zahlen, mit $(+a)$ bezeichnen. Später wird eine Vereinfachung der Schreibweise eintreten. Die positiven und negativen Zahlen zusammen nennen wir die relativen Zahlen, weil ihr Wert von ihren Vorzeichen abhängig ist.

Das Rechnen mit der Null.

3. Für das Rechnen mit der Zahl 0 gelten, wenn a eine natürliche Zahl ist, die vier Gesetze:

(I) $$a + 0 = a$$

(II) $$a - 0 = a \quad \text{und} \quad 0 - a = (-a)$$

(III) $$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0$$

(IV) $$0 : a = 0.$$

Den noch übrigbleibenden Fall, daß der Divisor in einer Divisionsaufgabe 0 ist, lassen wir vorläufig außer acht.

Addition relativer Zahlen.

4. Die Addition zweier positiven Zahlen ist mit dem in § 1 gesagten bereits erledigt. Es ist (Fig. 2)

(1) $$(+a)+(+b)=(+[a+b]).$$

Ich habe beispielsweise an der Hand der Zahlengeraden von der positiven Zahl (+ 7) um die positive Zahl (+ 3) weiterzuzählen und komme dann bis (+ 10).

Auch der Fall

(2) $$\begin{cases}(-a)+(+b)=(-[a-b]), & \text{wenn } a>b \text{ ist,}\\ (-a)+(+b)=(+[b-a]), & \text{wenn } b>a \text{ ist,}\end{cases}$$

erfordert keine wesentlich neuen Festsetzungen. Man geht von der negativen Zahl $(-a)$ um die positive Zahl $(+b)$ auf der Zahlgeraden vorwärts. Ist dabei die Zahl b kleiner als a, so wird der Punkt, den man erreicht, noch im Gebiet der negativen Zahlen liegen; sein Abstand vom Nullpunkt ist $a-b$ (Fig. 15). Ist hingegen die Zahl b größer als die Zahl a, so kommt man bis zu einem Punkt im Gebiet der positiven Zahlen, dessen Abstand vom Nullpunkt $b-a$ ist (Fig. 16).

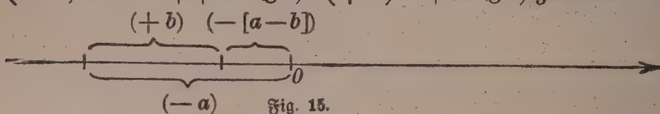


Fig. 15.

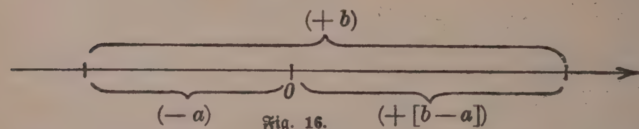


Fig. 16.

Wenn wir jetzt aber $(+a)+(-b)$ bestimmen wollen, so sehen wir uns zu einer neuen Festsetzung genötigt. Wir haben bisher nur von einem Weiterzählen um die positive Zahl a sprechen können, noch nicht von einem Weiterzählen um negative Zahlen. Wir werden die neue Erklärung, die jetzt nötig wird, so einrichten, daß das kommutative Gesetz der Addition (§ 1, Nr. 6) gilt. Dann wird also dasselbe bei unserer Additionsaufgabe herauskommen wie bei $(-b)+(+a)$. Das ist nach dem Gesetz (2) zu bestimmen. Wir erhalten danach

(3) $$\begin{cases}(+a)+(-b)=(+[a-b]), & \text{wenn } a>b \text{ ist,}\\ (+a)+(-b)=(-[b-a]), & \text{wenn } b>a \text{ ist.}\end{cases}$$

Was heißt das aber? Um $(-b)$ vorwärts gehen heißt danach, um $(+b)$ rückwärts gehen (Fig. 17). Unter dem Vorwärtsschreiten um eine negative Zahl (der Addition einer negativen Zahl) versteht man das Rückwärtsschreiten um die entsprechende positive Zahl (das Subtrahieren der entsprechenden positiven Zahl).

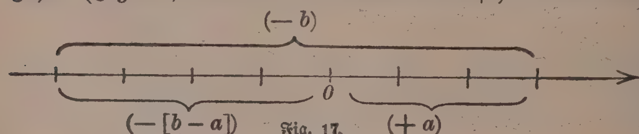


Fig. 17.

Wir sagten, daß wir die neue Erklärung so gefaßt haben, daß das kommutative Gesetz weiter gilt. Es wird sich immer empfehlen, neue Festsetzungen so zu treffen, daß schon bekannte Erklärungen und Gesetze erhalten bleiben.

Diese Erklärung kann ich jetzt auch zur Aufstellung des letzten Gesetzes verwenden, das sich von (3) nur dadurch unterscheidet, daß der Ausgangspunkt eine negative Zahl ist:

(4) $$(-a) + (-b) = (-[a+b]).$$

Subtraktion relativer Zahlen.

5. In gleicher Weise wie oben finden wir die Gesetze für die Subtraktion relativer Zahlen. Die Aufgabe $(+a) - (+b)$ ist jetzt auch dann lösbar, wenn b größer als a ist, wenn ich also beim Rückwärtsschreiten auf dem Zahlstrahl den Nullpunkt auf dem Wege nach links überschreite. Es ist

(1) $$\begin{cases} (+a) - (+b) = (+[a-b]), & \text{wenn } a > b \text{ ist,} \\ (+a) - (+b) = (-[b-a]), & \text{wenn } b > a \text{ ist.} \end{cases}$$

Ebenso findet man, wenn der Ausgangspunkt statt der positiven Zahl $(+a)$ die negative Zahl $(-a)$ ist,

(2) $$(-a) - (+b) = (-[a+b]).$$

Nun aber stehen wir vor der Aufgabe, festzusetzen, was wir unter dem Rückwärtszählen um eine negative Zahl verstehen. Da wir unter dem Vorwärtszählen um eine negative Zahl ein Rückwärtszählen um die entsprechende positive Zahl verstanden haben, dabei also den Sinn des Fortschreitens umgekehrt haben, setzen wir fest, daß wir unter dem Rückwärtszählen um eine negative Zahl ein Vorwärtszählen um die entsprechende positive Zahl verstehen wollen. Wenn also die Aufgabe $(+a) - (-b)$ vorliegt, so werden wir an die Stelle des Rückwärtszählens um $(-b)$ ein Vorwärtszählen um $(+b)$ setzen. Man erhält damit:

(3) $$(+a) - (-b) = (+[a+b]),$$

wenn der Ausgangspunkt des Zählens ein positiver Wert ist, hingegen im Falle, wo der Ausgangspunkt ein negativer Wert ist,

(4) $$\begin{cases} (-a) - (-b) = (+[b-a]), & \text{wenn } b > a \text{ ist,} \\ (-a) - (-b) = (-[a-b]), & \text{wenn } a > b \text{ ist.} \end{cases}$$

6. Die in Nr. 5 entwickelten Subtraktionsgesetze lassen sich ohne weiteres aus den Additionsgesetzen in Nr. 4 ableiten, wenn man von der Erklärung der Subtraktion als der Umkehrung der Addition ausgeht. Um z. B. die Richtigkeit des Gesetzes (3) zu zeigen, braucht man nur die Probe zu machen; sie ergibt in der Tat richtig

$$(+[a+b]) + (-b) = (+[a+b-b]) = (+a).$$

Vereinfachte Schreibweise der relativen Zahlen.

7. Unsere bisherige Schreibweise hatte den Vorteil, daß jeder Zahl sofort anzusehen war, ob sie positiv oder negativ war; das Vorzeichen + oder — wurde deutlich von dem Rechenzeichen + oder — unterschieden. Man geht trotzdem von dieser Schreibweise ab, weil sie einen großen Nachteil hat, ganz abgesehen von der Benutzung der Klammern. Wir mußten bei nicht wenigen Regeln zwei Fälle unterscheiden, je nachdem das Ergebnis eine positive oder negative Zahl wurde. Wenn jetzt auch im erweiterten Bereiche der Zahlen alle Subtraktionen ausführbar sind,

so sind wir doch noch immer gezwungen, in lästiger Weise bei einzelnen Rechnungen Nebenbedingungen hinzuzufügen. Das ist der Grund, daß man die Zahlen rechts des Gleichheitszeichens kürzer schreibt:

(I) $(+a)+(+b)=a+b$ (V) $(+a)-(+b)=a-b$
(II) $(+a)+(-b)=a-b$ (VI) $(+a)-(-b)=a+b$
(III) $(-a)+(+b)=-a+b$ (VII) $(-a)-(+b)=-a-b$
(IV) $(-a)+(-b)=-a-b$ (VIII) $(-a)-(-b)=-a+b.$

Diese vereinfachte Schreibweise ist möglich, weil sowohl die Addition der positiven Zahl $(+a)$ wie die Subtraktion der negativen Zahl $(-a)$ auf eine Addition von a herauskommt, und ebensowohl die Addition von $(-a)$ wie die Subtraktion von $(+a)$ auf eine Subtraktion von a. — Bei dieser vereinfachten Schreibweise bedarf es dann keiner besonderen Unterscheidung mehr, ob z. B. $a-b$ im Endergebnis eine positive oder eine negative Zahl ist.

8. Ein Vorteil der Einführung negativer Zahlen ist es, daß man jetzt jede Differenz $a-b$ auch als Summe, nämlich der Zahl a und der negativen Zahl $-b$, auffassen kann. Man spricht deshalb auch bei Ausdrücken, bei denen irgendwelche Glieder additiv oder subtraktiv miteinander verbunden sind, von algebraischen Summen. Ein anderer Ausdruck für denselben Begriff ist Polynom, im Gegensatz zu einem eingliedrigen Ausdruck, einem Monom.

9. Die in § 1 Nr. 15 abgeleiteten Klammerregeln

$$m+(a+b)=m+a+b$$
$$m+(a-b)=m+a-b$$
$$m-(a+b)=m-a-b$$
$$m-(a-b)=m-a+b$$

gelten nicht nur für irgendwelche natürlichen Zahlen m, a und b, sondern für alle relativen Zahlen, insbesondere auch für $a=0$. In diesem Falle sind sie, da man die Summen $0+b$ und die Differenzen $0-b$ als die relativen Zahlen $+b$ und $-b$ auffassen kann, mit den Gleichungen identisch, durch die die Addition und Subtraktion der relativen Zahlen festgelegt wurde.

Multiplikation relativer Zahlen.

10. Wenn zwei positive Zahlen miteinander multipliziert werden, so ist das Ergebnis wieder eine positive Zahl; das ist eine aus dem Bereich der natürlichen Zahlen bekannte Tatsache. Es ist also

(I) $$(+a)\cdot(+b)=+ab.$$

Wenn es sich um die Multiplikation einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl, also etwa $(-a)\cdot(+b)$ handelt, so werden wir in Anlehnung an die Erklärung der Multiplikation im Bereiche der natürlichen Zahlen das Ergebnis dadurch finden können, daß wir eine Summe aus b Summanden $(-a)$ bilden. Dann ergibt sich

(II) $$(-a)\cdot(+b)=-ab.$$

Mit dieser Erklärung der Multiplikation kommen wir aber nicht weiter, wenn es sich wie in $(+a)\cdot(-b)$ um einen negativen Multiplikator handelt. Ich kann nicht eine Summe aus $(-b)$ Summanden bilden. Wir müssen eine neue Erklärung der Multiplikation finden. Wir verlangen, daß jedenfalls das kommutative Gesetz der

Multiplikation erhalten bleibt. Dann hat also $(+a) \cdot (-b)$ das gleiche Ergebnis wie $(-b) \cdot (+a)$. Das ist aber nach der Formel (II) $-ab$. Wir setzen also fest

(III) $$(+a) \cdot (-b) = -ab.$$

Das würde in Worten heißen: Man multipliziert mit einer negativen Zahl, indem man mit der entsprechenden positiven Zahl multipliziert und dem Ergebnis das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Diese Regel, die eben auf einen positiven Multiplikanden angewandt wurde, wenden wir nun auch für einen negativen Multiplikanden an — wobei wir also erneut eine Festsetzung treffen — und erhalten

(IV) $$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Alle vier Regeln können wir dahin zusammenfassen: **Das Produkt zweier Zahlen ist positiv, wenn die Zahlen gleiches, negativ, wenn sie ungleiches Vorzeichen haben.**

11. Daß die durch die Gesetze von Nr. 10 getroffene Festlegung der Multiplikation relativer Zahlen zweckmäßig ist, läßt sich z. B. an den in § 1, Nr. 35 abgeleiteten Multiplikationsregeln zeigen. Nicht nur gelten jetzt diese Regeln auch dann, wenn die einschränkenden Bedingungen, die wir seinerzeit machen mußten, fortfallen; man kann sogar umgekehrt aus jenen früheren Gesetzen die von Nr. 10 ablesen, wenn wir in ihnen $a = 0$ und $c = 0$ setzen und verlangen, daß sie auch dann Geltung haben.

Division relativer Zahlen.

12. Die Divisionsgesetze für die relativen Zahlen ergeben sich aus der Forderung, daß auch bei der Ausdehnung des Begriffes der Division auf negative Zahlen diese vierte Rechenoperation die Umkehrung der Multiplikation ist. Wir erhalten:

(I) $$(+a):(+b) = +(a:b),$$
(II) $$(+a):(-b) = -(a:b),$$
(III) $$(-a):(+b) = -(a:b),$$
(IV) $$(-a):(-b) = +(a:b),$$

denn nur bei dieser Zeichensetzung wird die Probe auf die Division „Produkt aus Divisor und Quotient gibt den Dividenden" auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig. Bei den Formeln ist, wenn sie im Bereich der relativen Zahlen Bedeutung haben sollen, Voraussetzung, daß die Divisionen auch wirklich aufgehen, mit anderen Worten, daß die Dividenden jeweils Vielfache der Divisoren sind.

§ 3. Die vier Grundrechenarten mit Brüchen.

Der Begriff des Bruches.

1. Die Division war im Gegensatz zur Multiplikation nicht immer restlos ausführbar (§ 1, Nr. 28). Wie nun die Forderung der unbeschränkten Ausführbarkeit bei der Subtraktion zur Einführung der negativen Zahlen geführt hat, so jetzt bei der Division zur Einführung der gebrochenen Zahlen, der Brüche. Da 3:4 im Bereiche der ganzen Zahlen nicht ausführbar ist, führe ich die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$ ein; ist $a:b$ im Bereiche der ganzen Zahlen nicht ausführbar, so definiert man als Ergebnis dieser Division die neue, gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$. Es bedeutet also $\frac{a}{b}$ den $b$ten Teil von a. a heißt der Zähler, b der Nenner des Bruches.

2. Man kann zum Begriff des Bruches $\frac{a}{b}$ auch noch auf anderem Wege gelangen. $\frac{1}{4}$ entsteht durch Viertelung der Einheit, ebenso $\frac{1}{b}$ dadurch, daß die Einheit in b gleiche Teile geteilt wird. $\frac{3}{4}$ sind dann 3 der neuen Einheiten $\frac{1}{4}$, und $\frac{a}{b}$ sind a der neuen Einheiten $\frac{1}{b}$. Diese Erklärung, die uns bei der Einführung der Rechenoperationen mit Brüchen mehrfach von Nutzen sein wird, zeigt deutlich, wie die Brüche auf der Zahlgeraden einzutragen sind. In Fig. 18 sind z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ und $-\frac{5}{4}$ eingetragen.

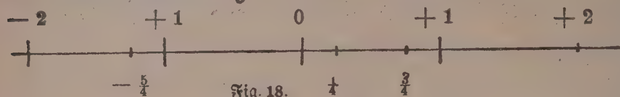


Fig. 18.

3. Unter dem reziproken Wert eines Bruches versteht man denjenigen Bruch, der aus dem ersten durch Vertauschung von Zähler und Nenner entsteht. Der reziproke Wert von $\frac{a}{b}$ ist also $\frac{b}{a}$. Da sich eine ganze Zahl m auch als Bruch $\frac{m}{1}$ schreiben läßt, ist ihr reziproker Wert $\frac{1}{m}$.

4. Durch die Einführung des Bruches wird eigentlich das besondere Operationszeichen für die Division überflüssig. Man kann zwar, wenn es sich um bestimmte Zahlen handelt, sagen, $3:4$ ist eine Divisionsaufgabe und $\frac{3}{4}$ ihr Ergebnis. Wenn es sich aber um unbestimmte Zahlen handelt, verschwindet der Unterschied. $a:b$ und $\frac{a}{b}$ sind gleichbedeutend. Ob man den Bruchstrich oder das :-Zeichen benutzt, dafür sind meist Zweckmäßigkeitsgründe maßgebend. Bei der Division von Polynomen muß man bei der Verwendung des :-Zeichens Klammern schreiben, beim Bruchstrich sind sie überflüssig und werden deshalb weggelassen. Man schreibt also statt $\frac{a+b}{c+d}$ auch $(a+b):(c+d)$, weil $a+b:c+d$ nach der bei § 1, Nr. 31 getroffenen Festsetzung etwas wesentlich anderes bedeuten würde.

Brüche von gleichem Wert.

5. Bei den negativen Zahlen bedurfte es keiner Erörterung, wann zwei von ihnen gleich sind; das war ihnen sofort anzusehen. Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ können aber sehr wohl gleich sein, ohne daß $a = c$ und $b = d$ ist. Wenn man in einem Bruch Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert, wenn man ihn erweitert, so ändert er seinen Wert nicht. So ist z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$. Allgemein wird

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

6. Ebenso ändert ein Bruch seinen Wert nicht, wenn man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert, wenn man ihn kürzt. Ich kann unser obiges Beispiel auch in umgekehrter Reihenfolge lesen und erhalte dann $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$. Allgemein ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}.$$

Es ist durchaus nicht immer leicht, zwei Brüchen anzusehen, daß sie gleichen Wert haben. Vgl. dazu § 4, Nr. 3.

Addition und Subtraktion von Brüchen.

7. Unsere Erklärung der Addition und Subtraktion als ein Vorwärts- oder Rückwärtszählen versagt zunächst bei den Brüchen; ich kann nicht um $\frac{1}{4}$ oder um $\frac{3}{4}$ weiterzählen. Wenn ich aber an die zweite Erklärung des Bruches denke und an die Veranschaulichung auf der Zahlgeraden, so wird sofort klar, was unter der Additionsaufgabe $\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$ zu verstehen ist. Ich habe von der Stelle $\frac{3}{4}$ auf der Zahlgeraden um 5 der neuen kleineren Einheiten $\frac{1}{4}$ fortzuschreiten. Ich erhalte $\frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$ (Fig. 19). Allgemein ist

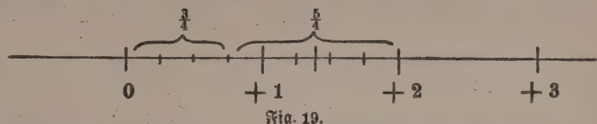


Fig. 19.

$$(1) \qquad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

und da sich ja die Subtraktion als Addition einer negativen Zahl auffassen läßt, auch

$$(2) \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

8. Nun handelte es sich aber in Nr. 7 nur um gleichnamige Brüche. Hat man zwei ungleichnamige Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, etwa $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$, so muß man sie erst gleichnamig machen, sie also in $\frac{9}{12}$ und $\frac{8}{12}$ verwandeln, und kann dann die Addition oder Subtraktion ausführen. Man erhält als Summe $\frac{17}{12}$, als Differenz $\frac{1}{12}$. Allgemein erhält man

$$(1) \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

$$(2) \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Multiplikation und Division von Brüchen.

9. Wenn es sich um die Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl handelt, so werden wir diese Aufgabe mit unserer bisherigen Auffassung vom Begriff der Multiplikation erledigen können. Es bedeutet z. B. $\frac{3}{4} \cdot 5$, daß $\frac{3}{4}$ 5mal als Summand zu setzen ist, das Ergebnis ist also $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$, d. h. $\frac{3 \cdot 5}{4}$ oder $\frac{15}{4}$ oder $3\frac{3}{4}$. Allgemein ist

$$\frac{a}{b} \cdot n = \overbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b}}^{n \text{ Summanden}},$$

$$= \frac{\overbrace{a + a + a + \cdots + a}^{n \text{ Summanden}}}{b};$$

also
$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b}$$

Man hat den Zähler mit n multipliziert, der Nenner bleibt unverändert. Ist die ganze Zahl n negativ, so nimmt auch das Produkt einen negativen Wert an, wenn man die in § 2, Nr. 10 gegebene Erklärung der Multiplikation mit negativen Zahlen von ganzen auf gebrochene Zahlen überträgt.

10. Die Division soll, auch wenn wir sie auf Brüche ausdehnen, die Umkehrung der Multiplikation bleiben. Daraus ergibt sich

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc},$$

denn die Probe ergibt

$$\frac{a}{bc} \cdot c = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Auch die Erklärung des Bruches führt zum gleichen Ergebnis. Teilt man $\frac{1}{b}$ in c Teile, so ist das Ergebnis $\frac{1}{b \cdot c}$, handelt es sich um a solcher Teile $\frac{1}{b}$, so ist das Ergebnis der Teilung durch c entsprechend $\frac{a}{bc}$.

11. Mit der in Nr. 9 benutzten Erklärung der Multiplikation kommen wir nicht aus, wenn der Multiplikator ein Bruch ist. Ich kann nicht, wenn etwa $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{7}$ zu multiplizieren ist, eine Summe aus $\frac{5}{7}$ Summanden bilden. Wir sind erneut gezwungen, den Begriff der Multiplikation zu erweitern. Wir nehmen zunächst den einfachen Fall, daß eine ganze Zahl mit einem Bruch zu multiplizieren ist, etwa n mit $\frac{a}{b}$. Wir verlangen, daß jedenfalls das kommutative Gesetz der Multiplikation weiter herrschen soll. Dann hat aber $n \cdot \frac{a}{b}$ das gleiche Ergebnis wie $\frac{a}{b} \cdot n$, und das ist nach der eben abgeleiteten Formel $\frac{an}{b}$. Wir werden also festsetzen

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{b}.$$

Die Formel lehrt, daß man unter der Multiplikation mit einem Bruche die Multiplikation mit dem Zähler und die Division des Ergebnisses durch den Nenner versteht. Mit dieser Auffassung der Multiplikation ergibt sich dann auch die Multiplikation eines Bruches mit einem anderen Bruche, es wird

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Man erhält das Produkt zweier Brüche, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

In dieser letzten Regel sind alle vorhergehenden der Nr. 11 enthalten.

Um zu zeigen, daß diese Erweiterung des Begriffes der Multiplikation sich in den alten Begriff einfügt, braucht nur daran erinnert zu werden, daß ja jede ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 angesehen werden kann. Die Multiplikation mit einem Bruche geht in diesem Falle in das bekannte frühere Multiplikationsverfahren über. Auch in der Weise kann man die Zweckmäßigkeit der neuen Festsetzung zeigen, daß man die Multiplikationsregel auf einen nur scheinbaren Bruch wie etwa $\frac{ma}{a}$ anwendet und zeigt, daß dann die Multiplikation mit diesem Bruch zum gleichen Ergebnis führt wie die Multiplikation mit der ganzen Zahl m.

12. Jetzt läßt sich auch die Division durch einen Bruch erledigen. Gehen wir wieder von der Erklärung der Division als Umkehrung der Multiplikation aus, so wird

$$a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c},$$

denn die Probe ergibt

$$\frac{ad}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{cd} = a,$$

und

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

denn es ist

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$$

Die Regeln für die Division lassen sich so zusammenfassen: **Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem reziproken Wert multipliziert.**

Zusammenfassung.

13. Bisher sind uns vier Rechenoperationen bekannt geworden, die Rechenoperationen erster Stufe, Addition und Subtraktion, und die Rechenoperationen zweiter Stufe, Multiplikation und Division. Im Bereiche der natürlichen Zahlen waren zunächst nur die Addition und die Multiplikation immer ausführbar. Wir erweiterten den Bereich der Zahlen ein erstes Mal durch Hinzufügen der negativen ganzen Zahlen zum Bereich der relativen Zahlen. Nachdem für die neuen Zahlen die vier Rechenoperationen erklärt waren, erhielten wir als Ergebnis, daß auch die Subtraktion, ebenso wie die Addition und die Multiplikation, im neuen Zahlenbereich immer ausführbar war. Erweiterten wir dann durch Hinzufügen der gebrochenen Zahlen den Zahlbereich ein zweites Mal, dann waren, nachdem die Bedeutung der Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen erklärt war, jetzt alle vier Rechenoperationen stets ausführbar. Man faßt die vier Rechenoperationen als die **rationalen Rechenoperationen** zusammen und nennt den Zahlbereich, der die positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen umfaßt, den Bereich der **rationalen Zahlen**. Das Ergebnis ist: **Im Bereiche der rationalen Zahlen ist jede rationale Rechenoperation ausführbar**, d. h.: **Wenn man mit irgend zwei rationalen Zahlen eine rationale Rechenoperation ausführt, so erhält man stets wieder eine rationale Zahl.**

14. Dabei ist eine Lücke geblieben. Es war noch nicht gesagt worden, was man unter $\frac{a}{0}$ versteht. Wenn in dem Bruch $\frac{a}{b}$, wo der Zähler a und der Nenner b positiv angenommen wird, der Nenner b kleiner und kleiner wird, während a irgendeine endliche Zahl ist, dann wächst der Bruch ins Ungemessene, er wird größer als jede beliebige Zahl. Man führt dafür das Zeichen ∞ (unendlich) ein. Es ist aber davor zu warnen, dieses Zeichen ∞ ohne weiteres als eine Zahl wie die bisher behandelten natürlichen, relativen oder rationalen anzusehen. Man tut am besten, von dem Rechnen mit diesem Zeichen ganz abzusehen. Das bedeutet also, daß man auch jede Division einer Zahl durch Null zu vermeiden hat.

§ 4. Die Proportionen.

Die vier Gleichungsgesetze.

1. Wenn zwei Ausdrücke, die ihrem Werte nach gleich, vielleicht aber in der Form verschieden sind, z. B. 4 und $2 + 2$ oder $(a + b)^2$ und $a^2 + 2ab + b^2$, durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden, so nennen wir eine solche Verbindung eine Gleichung. Alle Formeln in den vorhergehenden Abschnitten waren Gleichungen. Man kann nun eine Gleichung nicht nur in der Weise verändern, daß man den ganzen Ausdruck auf einer Seite in eine andere Form bringt, sondern auch so, daß gleichzeitig mit beiden Seiten der Gleichung Veränderungen vorgenommen werden. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten 1. Gleiches addiert, 2. Gleiches subtrahiert, 3. mit Gleichem multipliziert und 4. durch Gleiches, ausgenommen die Null, dividiert.

In Gestalt von Formeln können wir das so ausdrücken: Wenn

$$a = b,$$
$$c = d$$

ist, dann ist auch

(1) $$a + c = b + d,$$

(2) $$a - c = b - d,$$

(3) $$a \cdot c = b \cdot d,$$

(4) $$a : c = b : d.$$

Dabei ist im vierten Gesetz der Fall, daß c und d den Wert 0 haben, nach unserer Verabredung in § 3, Nr. 14 ausdrücklich auszunehmen.

2. Für die Praxis der Umgestaltung von Gleichungen gibt man den vier Gesetzen von Nr. 1 eine andere Form. Wenn man in

(1) $$a + b = c$$

den Summanden b beiderseits subtrahiert, so nimmt die Gleichung die Gestalt

(1') $$a = c - b$$

an: Ein Summand auf der einen Seite einer Gleichung wird zum Subtrahenden auf der anderen Seite. Das ist das Gesetz, was in Nr. 1 dem Gesetz (2) entsprach.

Wenn man in

(2) $$a - b = c$$

beiderseits den Subtrahenden b addiert, so erhält man

(2') $$a = b + c;$$

ein Subtrahend auf der einen Seite der Gleichung wird zum Summanden auf der anderen Seite. Das entspricht dem Gesetz (1) in Nr. 1. Wenn man in

(3) $$a \cdot b = c$$

beiderseits durch den Faktor b dividiert, dann erhält man

(3') $$a = \frac{c}{b};$$

ein Faktor auf der einen Seite der Gleichung wird zum Divisor auf der anderen Seite. Das entspricht dem Gesetz (4) in Nr. 1. Wenn man schließlich in

(4) $$a : b = c$$

beiderseits mit dem Divisor b multipliziert, dann erhält man

(4') $$a = c \cdot b;$$

ein Divisor auf der einen Seite einer Gleichung wird zum Faktor auf der anderen Seite. Das entspricht dem Gesetz (3) in Nr. 1.

Begriff der Proportion.

3. Sind die Brüche oder Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gleich, d. h. haben sie gleichen Wert, dann nennt man die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

oder mit Symbol : geschrieben

$$a : b = c : d$$

eine Proportion und liest sie „a zu b wie c zu d". a und d heißen die äußeren, b und c die inneren Glieder der Proportion, a und c die vorderen, b und d die hinteren Glieder.

Die Produktengleichung.

4. Wenn man die Proportion

$$a : b = c : d$$

beiderseits mit bd multipliziert, so erhält man die Produktengleichung

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren. Umgekehrt läßt sich aus der Produktengleichung mittelst Division durch bd wieder die Proportion ableiten. — Die Produktengleichung ist ein praktisches Mittel zur Feststellung, ob zwei Brüche gleichen Wert haben oder ob eine Proportion richtig ist.

5. Da ich die Produktengleichung der Proportion

$$a : b = c : d$$

ebenso wie durch bd auch durch ab, dc oder ad dividieren kann und außerdem aus jeder Proportion eine andere gewinnen kann, wenn ich die beiden Seiten der Gleichung vertausche, so folgen aus der Ausgangsproportion noch sieben andere. Sie zeigen, daß man in einer Proportion die inneren, die äußeren, die inneren und äußeren Glieder und jeweils die beiden Seiten vertauschen kann.

Der Proportionalitätsfaktor.

6. Ist eine Proportion

(1) $$a : b = c : d$$

gegeben, so kann man eine Größe t, den Proportionalitätsfaktor, so finden, daß

(2) $$a = t \cdot c, \quad b = t \cdot d$$

ist. t ist z. B im Falle der Proportion

$$3:6=1:2$$

die Zahl 3. Man erhält die Zahl t, indem man $\frac{a}{c}$ oder die gleichgroße Zahl $\frac{b}{d}$ nach Möglichkeit kürzt. Umgekehrt läßt sich aus den beiden Gleichungen (2) sofort die Proportion (1) schließen.

7. Mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors lassen sich aus der Proportion

$$a:b=c:d$$

die Proportionen

(1) $$(a+b):b=(c+d):d,$$

(2) $$a:(a+b)=c:(c+d)$$

und ähnliche ableiten. Die gegebene Proportion ist nämlich mit den Gleichungen

$$a=t\cdot c \quad \text{und} \quad b=t\cdot d$$

gleichbedeutend und aus diesen Gleichungen folgt durch Addition

(1′) $$a+b=t\cdot(c+d) \quad \text{und} \quad b=t\cdot d,$$

(2′) $$a=t\cdot c \quad \text{und} \quad a+b=t\cdot(c+d);$$

nach Nr. 6 folgen daraus die behaupteten Proportionen. — Diese neuen Proportionen lassen sich auch auf anderem Wege finden, so z. B. die Proportion (1), indem man in der gegebenen Proportion beiderseits 1 addiert:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

8. Die in Nr. 7 abgeleiteten Gesetze sind besondere Fälle des allgemeinen Gesetzes der korrespondierenden Addition und Subtraktion. Sind p, q, r und s irgendwelche Zahlen, so folgt aus

$$a:b=c:d$$

$$(pa+qb):(ra+sb)=(pc+qd):(rc+sd),$$

denn aus

$$a=t\cdot c \quad \text{und} \quad b=t\cdot d$$

folgt auch

$$pa+qb=t\cdot(pc+qd) \quad \text{und} \quad ra+sb=t\cdot(rc+sd).$$

§ 5. Gleichungen ersten Grades.

Begriff der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.

1. Die in § 4 behandelten Gleichungen geben Beziehungen zwischen irgendwelchen als bekannt vorausgesetzten Größen wieder, die stets richtig bleiben, welche Werte man auch für die in ihnen auftretenden Buchstabenausdrücke einsetzt. Man nennt solche Gleichungen auch identische Gleichungen. Von ihnen sind wesentlich verschieden die Bestimmungsgleichungen. Es handelt sich darum, eine oder mehrere unbekannte Größen aus anderen bekannten oder als bekannt anzusehenden

Größen zu bestimmen. Bezeichnen wir die Unbekannte mit x, so nennt man eine Gleichung der Form

$$mx + n = 0$$

eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten. Darin soll der Faktor von x, die Zahl m, eine bekannte (bis auf weiteres rationale), von 0 verschiedene Zahl, und das von x freie Glied n eine (bis auf weiteres rationale) bekannte Zahl sein.

Die Lösung der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.

2. Hat eine Gleichung ersten Grades bereits die in Nr. 1 erwähnte Normalform, so ist die Lösung mit Hilfe der in § 4, Nr. 1 und 2 entwickelten Gleichungsgesetze, die für Bestimmungsgleichungen ebenso wie für identische Gleichungen gelten, sofort zu finden. Man bringt den Summanden n auf die rechte Seite der Gleichung und erhält

$$mx = -n;$$

dann schafft man auch noch den Faktor m auf die rechte Seite und erhält nun die Gleichung in einer Form, bei der auf der linken Seite nur noch x und damit rechts der Wert von x steht:

$$x = -\frac{n}{m}.$$

3. Oft muß eine Gleichung ersten Grades erst auf die Normalform gebracht werden. Kommt eine Unbekannte in Klammern vor, so müssen diese aufgelöst werden, kommen mehrere Glieder mit x vor, so sind diese so zusammenzufassen, daß x mit einem Klammerausdruck multipliziert erscheint. Man tut gut, auftretende Brüche, in deren Zähler die Unbekannte steht, dadurch zu beseitigen, daß man mit dem Hauptnenner aller in der Gleichung vorkommenden Nenner multipliziert

Bruchgleichungen.

4. Gleichungen, in denen Brüche auftreten, die die Unbekannte im Nenner haben, wollen wir als Bruchgleichungen bezeichnen. Es sind das nicht eigentlich Gleichungen ersten Grades, sie können aber oft auf Gleichungen ersten Grades dadurch zurückgeführt werden, daß man mit dem Hauptnenner aller auftretenden Brüche multipliziert.

Begriff der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

5. Eine Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten läßt sich stets auf die Form

(1) $$ax + by = c$$

bringen, wo x und y die beiden Unbekannten, a, b und c bekannte (bis auf weiteres rationale) Größen bezeichnen. Aus einer solchen Gleichung allein lassen sich die beiden Unbekannten nicht bestimmen. Es ist noch eine zweite solche Gleichung nötig, also etwa

(2) $$dx + ey = f.$$

6. Die beiden Gleichungen, durch welche die zwei Unbekannten bestimmt werden sollen, müssen voneinander unabhängig sein und dürfen nicht einander widersprechen. Lautet beispielsweise die erste Gleichung

$$7x + 3y = 5,$$

und die zweite

$$7x = 5 - 3y,$$

so ist die zweite Gleichung die gleiche wie die erste, nur ein wenig umgestellt. Das ist auch der Fall, wenn ich ihr etwa die Form

$$7x + 7 = 12 - 3y$$

gebe, indem ich beiderseits 7 addiere, oder nun noch weiter durch 7 dividiere, also

$$x + 1 = 1\tfrac{5}{7} - \tfrac{3}{7}y.$$

Alle diese Formen und beliebig viele aus ihnen unter Anwendung der Gleichungsgesetze (§ 4, Nr. 1) gebildete Gleichungen sind abhängig von der ersten Gleichung, besagen nichts anderes als diese selbst und genügen also nicht zur Bestimmung der Unbekannten.

Ebenso darf die zweite Gleichung nicht im Widerspruch mit der ersten stehen. Lautet die zweite Gleichung etwa

$$7x + 3y = 12,$$

so ist klar, daß die Summe $7x + 3y$ nicht gleichzeitig den Wert 5 und 12 annehmen kann, wie auch die Unbekannten lauten möchten. Sollen die beiden Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten Lösungen haben, so müssen die beiden Gleichungen also unabhängig und widerspruchslos sein.

7. Handelt es sich um drei Unbekannte, die etwa mit x, y und z bezeichnet sein mögen, so sind zu ihrer Bestimmung drei Gleichungen ersten Grades notwendig. Auch diese drei Gleichungen, deren erste etwa die Form

$$ax + by + cz = d$$

hat, wo die Zahlen a, b, c und d bekannt sind, müssen voneinander unabhängig und ohne Widerspruch miteinander sein. Die Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit ist hier noch schwerer als bei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu erkennen, weil die dritte Gleichung nicht bloß unabhängig von der ersten und der zweiten, sondern auch von irgendeiner aus jenen beiden ersten durch gegenseitige Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gebildeten Gleichung sein muß, auch nicht mit irgendeiner solchen Gleichung in Widerspruch stehen darf.

8. Liegen mehr als drei Unbekannte vor, etwa n, so sind zu ihrer Bestimmung auch n unabhängige und gegenseitig widerspruchslose Gleichungen notwendig.

Lösung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

9. Sind zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten gegeben, etwa

$$2x + 3y = 13,$$
$$2x - y = 1,$$

so kann man sie immer durch Elimination der einen Unbekannten auf eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten zurückführen. Man berechnet die eine Unbekannte aus einer der Gleichungen, also hier etwa aus der ersten Gleichung die Unbekannte x

$$2x = 13 - 3y,$$
$$x = \tfrac{13}{2} - \tfrac{3}{2}y,$$

und setzt diesen Wert in die zweite Gleichung für x ein. Dann enthält die zweite Gleichung nur noch eine Unbekannte; sie lautet

$$2\left(\tfrac{13}{2} - \tfrac{3}{2}y\right) - y = 1,$$
$$13 - 3y - y = 1,$$
$$12 = 4y,$$
$$y = 3.$$

Damit ist die eine Unbekannte bestimmt. Die andere erhalte ich, wenn ich den für y errechneten Wert in eine der gegebenen Gleichungen oder in die Substitutionsgleichung (die Gleichung für x) einsetze. In unserem Falle wird $x = 2$. Diese Substitutionsmethode besteht also im allgemeinen Fall darin, daß ich aus der ersten Gleichung, welche die Form

$$ax + by = c$$

haben mag, x oder y ausrechne und den erhaltenen Wert in die zweite Gleichung, welche die Form

$$dx + cy = f$$

haben möge, einsetze. Dann erhalte ich immer eine Gleichung ersten Grades für die andere Unbekannte. Diese löse ich und setze den erhaltenen Wert in die Substitutionsgleichung oder in eine der gegebenen Gleichungen ein. Diese liefert dann die andere Unbekannte.

10. Das Unpraktische an der Substitutionsmethode ist das Auftreten der Brüche bei der Durchführung der Rechnung. Diese Schwierigkeit fällt weg, wenn in einer der Gleichungen die eine Unbekannte ohne Koeffizient auftritt. So wäre es im Beispiel von Nr. 9 weit praktischer gewesen, aus der zweiten Gleichung y auszurechnen. Man erhält ohne weiteres den Wert

$$y = 2x - 1,$$

setzt ihn in die andere Gleichung ein, die nun in der Form

$$2x + 3(2x - 1) = 13$$

keine Brüche aufweist und sehr schnell zum Ziel führt:

$$2x + 6x - 3 = 13,$$
$$8x = 16,$$
$$x = 2.$$

11. Eine Abart der Substitutionsmethode ist die Gleichsetzungsmethode. Man drückt in beiden Gleichungen eine der beiden Unbekannten, etwa y, durch die andere aus, also im Beispiel von Nr. 9

$$y = \tfrac{13}{3} - \tfrac{2}{3}x,$$
$$y = 2x - 1.$$

Die Beseitigung der einen Unbekannten geschieht nun dadurch, daß man die beiden Werte dieser Unbekannten gleichsetzt, hier also

$$2x - 1 = \tfrac{13}{8} - \tfrac{2}{3}x.$$

Diese Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten wird dann in gewohnter Weise gelöst.

12. Bei der Gleichsetzungsmethode treten gleichfalls als unnötige Erschwerung der Rechnung Brüche auf. Man kann sie manchmal dadurch vermeiden, daß man nicht eine der Unbekannten selbst, sondern irgendein Vielfaches von ihnen, das in beiden Gleichungen vorkommt, zweimal ausdrückt. Im Beispiel von Nr. 9 würde man z. B. aus beiden Gleichungen am besten $2x$ ausdrücken, also

$$2x = 13 - 3y,$$
$$2x = 1 + y.$$

Daraus ergibt sich

$$13 - 3y = 1 + y,$$
$$12 = 4y,$$
$$y = 3.$$

13. Die Additions- und Subtraktionsmethode mag zunächst an dem einfachen Beispiel

$$x + y = 7,$$
$$x - y = 3$$

erläutert werden. Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$2x = 10,$$
$$x = 5,$$

durch Subtraktion

$$2y = 4,$$
$$y = 2.$$

Im allgemeinen Falle der Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f$$

muß man, ehe man die eine Unbekannte durch Subtraktion entfernen kann, die erste Gleichung mit d, die zweite mit a multiplizieren. Dann hat die erste Gleichung ebenso wie die zweite ein Glied adx. Durch Subtraktion bringt man das Glied zum Wegfall und behält eine Gleichung für y. Ebenso bringt man das Glied mit y zum Wegfall, wenn man die erste Gleichung mit e, die zweite mit b multipliziert.

14. Sind die Koeffizienten der einen Unbekannten gleich oder haben sie gar den Wert 1, so tritt bei dieser Methode von selbst eine Vereinfachung der Rechnung ein. Im Beispiel von Nr. 9

$$2x + 3y = 13,$$
$$2x - y = 1$$

brauchen wir, um x zum Wegfall zu bringen, gar nicht erst zu multiplizieren, sondern erhalten sofort durch Subtraktion

$$4y = 12, \quad y = 3.$$

Um y zu entfernen, brauchen wir nur die zweite Gleichung mit 3 zu multiplizieren und zu addieren:

$$8x = 16, \quad x = 2.$$

Noch einfacher gestaltet sich die Lösung, wenn ein Koeffizient einer Gleichung Null wird.

15. Sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, so kann man immer so verfahren, daß man sich durch eine Substitution zwei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten verschafft. Dabei ist für die Durchführung der Rechnung die Wahl einer recht zweckmäßigen Substitution von Bedeutung. Auch die Additions- und Subtraktionsmethode läßt sich zum gleichen Zweck heranziehen.

Die Lösung der Gleichungssysteme von vier und mehr Unbekannten kann in der Weise geschehen, daß man schrittweise die Anzahl der Unbekannten und der zu ihrer Bestimmung notwendigen Gleichungen herabsetzt.

§ 6. Die lineare Funktion.

Das Koordinatensystem.

1. Zwei aufeinander senkrecht stehende Zahlgeraden mit gemeinsamem Nullpunkt bilden ein Koordinatensystem. Die eine Koordinatenachse pflegt man wagerecht zu legen, den positiven Teil nach rechts; man nennt sie die x-Achse. Die dazu senkrechte Achse heißt die y-Achse; ihr positiver Teil soll sich nach oben erstrecken. Die Einheiten auf beiden Achsen sollen im allgemeinen die gleichen sein (Fig. 20).

In der Ebene der Koordinatenachsen sei ein Punkt P gegeben. Man zieht durch ihn zu den Koordinatenachsen Parallelen. Den Abstand des Parallelenschnittpunktes auf der x-Achse vom Nullpunkt nennt man die x-Koordinate des Punktes, den Abstand des Parallelenschnittpunktes auf der y-Achse nennt man die y-Koordinate des Punktes. Diese y-Koordinate wird auch durch die Länge der vom Punkt auf die x-Achse gefällten Senkrechten angegeben (Fig. 20).

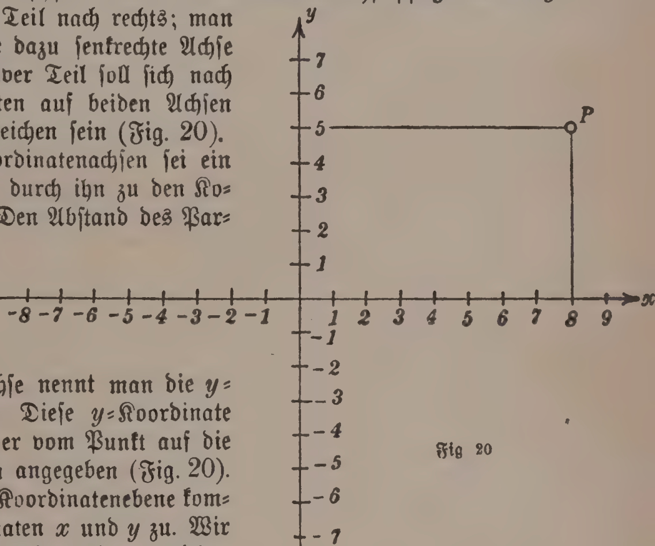


Fig 20

2. Jedem Punkt in der Koordinatenebene kommen ganz bestimmte Koordinaten x und y zu. Wir schreiben das $P(x, y)$. Umgekehrt gehört zu jeder Angabe irgend zweier Zahlwerte x und y ein ganz bestimmter Punkt. So hat z. B. in Fig. 20 der Punkt P die Koordinaten 8 und 5. Recht praktisch erweist sich für die Zuordnung von Punkten in der Ebene und Zahlenpaaren die Benutzung von Millimeterpapier.

3. Die Punkte in der rechten Halbebene haben positive x-Koordinaten, die in der linken Halbebene negative x-Koordinaten. Die Punkte in der oberen Halbebene haben positive y-Koordinaten, die in der unteren Halbebene negative y-Koordinaten. Der erste Quadrant, rechts oben, hat nur Punkte mit positiven Koordinaten, der zweite Quadrant, links oben, umfaßt die Punkte mit positiven y- und negativen x-Koordinaten. Der dritte Quadrant, links unten, umfaßt die Punkte mit negativen x- und y-Koordinaten. Der vierte Quadrant schließlich, rechts unten, umfaßt die Punkte mit positiven x-Koordinaten, aber negativen y-Koordinaten. Die Punkte

der x-Achse haben als y-Koordinate den Wert 0, die Punkte der y-Achse haben als x-Koordinate den Wert 0. Die Koordinaten des Koordinatenanfangspunktes sind 0 und 0.

Geraden im Koordinatensystem.

4. Der geometrische Ort der Punkte, die von der x-Achse den Abstand a haben, ist eine Parallele zur x-Achse in diesem Abstand, die in der positiven Halbebene liegt, wenn a positiv ist. Für alle Punkte dieser Geraden ist die y-Koordinate a. Man sagt auch,

$$y = a$$

ist die Gleichung, genauer die Funktionalgleichung, der angegebenen Geraden (Fig. 21).

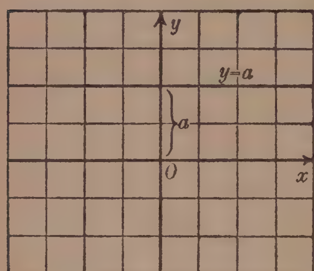


Fig. 21.

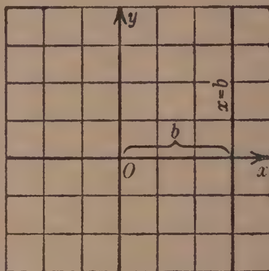


Fig. 22.

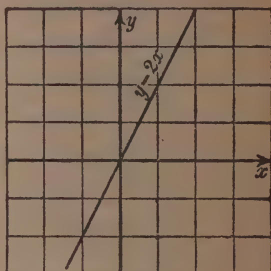


Fig. 23.

Ebenso ist die Gleichung der Geraden, die im Abstande b parallel zur x-Achse verläuft (Fig. 22)

$$x = b$$

Der geometrische Ort der Punkte, deren y-Koordinate das $a$fache der x-Koordinate ist, ist wieder eine Gerade, die durch den Nullpunkt geht (Fig. 23). Sie hat die Gleichung

$$y = ax.$$

Im Falle der Fig. 23 ist $a = 2$. Ist im besonderen $a = 1$, so erhält man die Winkelhalbierende des Koordinatensystems, die durch den ersten Quadranten geht. Für die dazu senkrechte Winkelhalbierende wird $a = -1$.

Die lineare Funktion.

5. Die Gleichung $y = ax$, die wir eben in Nr. 4 kennen lernten, ist weder eine identische Gleichung in dem Sinne, wie wir sie früher kennen gelernt haben, noch eine Bestimmungsgleichung. Der Buchstabe y steht für „die y-Koordinate", der Buchstabe x für „die x-Koordinate". y und x sind dabei weder bekannte noch unbekannte, aber bestimmbare Werte, sie sind vielmehr veränderlich, können verschiedene Werte annehmen. Sie heißen Veränderliche oder Variable. Erteilt man x irgendeinen ganz beliebigen Wert, dann nimmt y einen bestimmten Wert an. Man nennt x darum die unabhängige, y die abhängige Variable. y heißt auch eine Funktion von x, und zwar in unserem Falle eine Funktion ersten Grades von x, weil die höchste Potenz, in der x vorkommt, die erste ist. Da x auch nicht im Nenner etwa auftretender Brüche vorkommt, nennt man die Funktion eine ganze, im Gegensatz zu gebrochenen Funktionen.

6. Eine Funktion der Form
$$y = ax$$
wird graphisch stets durch eine Gerade dargestellt, die durch den Nullpunkt geht. Die als bekannt anzunehmende Größe a, die man im Gegensatz zu den variablen Größen auch eine Konstante nennt, gibt die Neigung der Geraden gegen die x-Achse an. Geht man um eine Einheit in der Richtung der x-Achse vorwärts, so steigt die Gerade um a Einheiten, wenn a positiv ist, oder fällt um a' Einheiten, wenn a gleich der negativen Zahl $-a'$ ist. Wir nennen a die Steigung der Geraden. (In der Fig. 23 ist z. B. die Steigung 2.)

Eine funktionale Beziehung dieser Art drückt man auch so aus, daß man sagt, y ist x proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist dann a. Sind nämlich x_1, y_1 und x_2, y_2 irgend zwei Punkte auf der Geraden, durch welche die Funktion $y = ax$ dargestellt wird, dann ist
$$y_1 = ax_1,$$
$$y_2 = ax_2;$$
daraus kann man aber sofort (vgl. § 4, Nr. 6) die Proportion
$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2$$
ablesen.

7. Die allgemeine Form einer ganzen Funktion ersten Grades ist
$$y = ax + b.$$
Das graphische Bild dieser Funktion ist wieder eine Gerade. Denn nimmt x um eine Einheit zu, so nimmt y jeweils um a zu.[1]) Auch hier gibt a die Steigung der Geraden an. Die Gerade geht aber nicht mehr durch den Nullpunkt. Für $x = 0$ nimmt die abhängige Variable y den Wert b an. b ist also der Abstand des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse vom Nullpunkt. (In Fig. 24 ist $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$.)

Da die ganze Funktion ersten Grades graphisch durch eine gerade Linie veranschaulicht wird, heißt sie auch lineare Funktion.

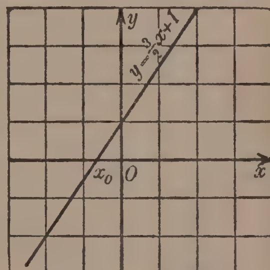


Fig. 24.

8. Die allgemeine Form einer in den Veränderlichen x und y linearen Funktion ist
$$Ax + By = C.$$
Auch dieser Ausdruck wird immer durch eine Gerade dargestellt. Ist B von Null verschieden, so kann ich den Ausdruck durch B dividieren und erhalte nach Umstellung des Gliedes mit x
$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B};$$
diese Funktion ist aber von der in Nr. 7 behandelten Form

Ist $B = 0$, so hat die Funktion die Form
$$Ax = C,$$

1) Wenn die Ähnlichkeitslehre bereits bekannt ist, ist der Nachweis, daß die lineare Funktion durch eine Gerade dargestellt wird, mit Hilfe ähnlicher Dreiecke zu erbringen.

läßt sich also, wenn A von Null verschieden ist, auf die Form

$$x = \frac{C}{A}$$

bringen. Das ist aber eine Beziehung, die auch durch eine Gerade, nämlich eine Parallele zur y-Achse dargestellt wird (vgl. Nr. 4). Wenn A und B gleichzeitig Null werden, muß auch C Null werden, diesen Fall brauchen wir dann nicht weiter zu beachten.

Nullstelle der linearen Funktion.

9. Dem Werte der unabhängigen Variablen x, für den die lineare Funktion

$$y = ax + b$$

den Wert Null annimmt, entspricht in der graphischen Darstellung der Punkt auf der x-Achse, in dem die entsprechende Gerade die x-Achse schneidet. Denn in diesem Schnittpunkt wird ja das zugehörige y Null. Bezeichne ich diese Stelle auf der x-Achse mit x_0 (wo jetzt x_0 ein Zahlenwert ist), so ist also (Fig. 24)

$$0 = ax_0 + b.$$

10. Liegt andererseits irgendeine Gleichung ersten Grades der Form

$$ax + b = 0$$

vor, wobei wir aber gut tun, die zwar unbekannte, aber ganz bestimmte Größe x, um eine Verwechslung mit der unabhängigen Variablen zu vermeiden, mit x_0 (oder auch mit u) zu bezeichnen, also

$$ax_0 + b = 0,$$

so kann ich diese Gleichung mit der linearen Funktion

$$y = ax + b$$

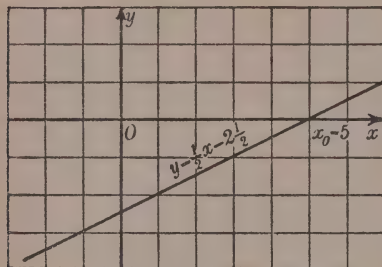


Fig. 25.

in Verbindung bringen. Die Lösung der Gleichung kann ich in der Weise finden, daß ich die zugehörige Funktion betrachte und deren Nullwert bestimme.

11. Den Nullwert einer linearen Gleichung bestimmt man zeichnerisch dadurch, daß man den Schnitt der Funktionsgeraden mit der x-Achse bestimmt. So kommen wir also zu einer graphischen Lösung der Gleichung ersten Grades (oder wie man aus jetzt begreiflichen Gründen (Nr. 7) auch sagt, der linearen Gleichung), indem wir die zugehörige lineare Funktion graphisch darstellen und deren Nullwert graphisch bestimmen. So ist z. B. in Fig. 25 die lineare Funktion $y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$ dargestellt; ihr Nullwert, den ich aus der Darstellung ablese, $x_0 = 5$, ist dann gleichzeitig die Lösung der zugehörigen Gleichung $\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} = 0$.

12. Praktisch ist die viel einfachere rechnerische Lösung dieser graphischen vorzuziehen. Die graphische Lösung erfordert mehr Zeit, wenn sie genau ausgeführt werden soll, sie erlaubt aber auch dann nur die Feststellung der Lösung mit einer Genauigkeit, die von der Zeichnung abhängig ist. Kommt man bei der graphischen

Lösung auf einen ganzzahligen Wert, so sollte man sich immer durch die Probe davon überzeugen, ob der Wert genau oder nur angenähert richtig ist.

Graphische Lösung der linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

13. Sind zwei lineare Funktionen gegeben, etwa

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} y = -2x + 3, \\ y = 3x - 2, \end{cases}$$

so entsprechen ihnen in der graphischen Darstellung zwei Geraden. Hat der Schnittpunkt die Koordinaten x_0 und y_0, so genügen diese Werte, da der Punkt ja auf jeder der Geraden liegt, beiden Gleichungen; man hat also

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} y_0 = -2x_0 + 3, \\ y_0 = 3x_0 - 2. \end{cases}$$

Aus den Funktionsgleichungen sind zwei Bestimmungsgleichungen für zwei Unbekannte geworden.

Diese Überlegung gestattet zweierlei Anwendung. Wenn die linearen Funktionen (I) gegeben sind, so gestattet die rechnerische Lösung der zugehörigen Gleichungen (II) die genaue Angabe der Lage des Schnittpunktes jener zwei Geraden, die die Funktionen graphisch darstellen. Liegen andererseits zwei lineare Gleichungen der Form (II) vor, so kann man sie in der Weise graphisch lösen, daß man die zugehörigen linearen Funktionen graphisch darstellt und die Koordinaten des Schnittpunktes aus der Zeichnung abliest. Das sind dann die gesuchten Lösungen der beiden Gleichungen. In Fig. 26 ist das für die besprochenen zwei Funktionen (I) bzw. Bestimmungsgleichungen (II) ausgeführt worden.

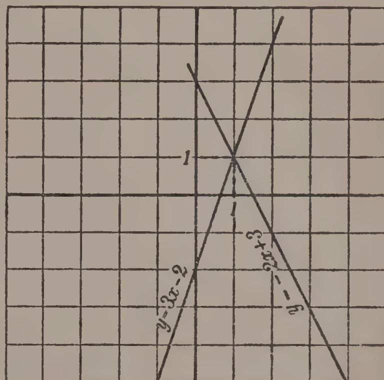


Fig. 26.

14. Um die graphische Lösung zweier linearen Gleichungen auszuführen, ist es nicht notwendig, die den Gleichungen entsprechenden Funktionen erst auf die Normalform $y = ax + b$ zu bringen. Man kann vielmehr die Geraden, die die Funktionen darstellen, auch aus irgendeiner anderen Form gewinnen, wenn man beachtet, daß eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist. Es genügt also, wenn etwa die Funktion in der Form $ax + by + c = 0$ gegeben ist, irgendeinen Wert x einzusetzen und das zugehörige y zu berechnen. Dann hat man einen Punkt der zugehörigen Geraden. Das Gleiche wiederholt man mit einem anderen Wert von x und erhält so einen zweiten Punkt und damit die Gerade selbst.

Für die Genauigkeit der graphischen Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten gilt dasselbe, was oben schon für die Bestimmung des Nullpunktes einer Funktion gesagt wurde: sie ist durch die Zeichnung, den benutzten Maßstab usw. bedingt. Erhält man z. B. als Lösungen ganzzahlige Werte, so ist es jedenfalls nötig, die Probe zu machen.

15. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten haben keine Lösung, wenn sie voneinander abhängig oder miteinander in Widerspruch sind (§ 5, Nr. 6). Sind die beiden Gleichungen, die zur Lösung vorgelegt werden, voneinander abhängig, so kommt das im graphischen Bilde darin zum Ausdruck, daß die beiden, die Funktionen darstellenden Geraden in eine zusammenfallen. Stehen die Gleichungen im Widerspruch, so zeigt das graphische Bild das dadurch, daß die beiden Geraden parallel werden. In beiden Fällen ist ein Schnittpunkt nicht vorhanden.

§ 7. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

Begriff der Potenz.

1. In § 1, Nr. 22 war als Abkürzung für Produkte, deren Faktoren gleich waren, die Potenzschreibung eingeführt worden. a^3 sollte ein Produkt $a \cdot a \cdot a$ bedeuten. Allgemein bedeutet a^n ein Produkt aus n Faktoren, deren jeder a ist. Die Basis a einer Potenz kann irgendeine rationale Zahl, der Exponent n irgendeine positive ganze Zahl sein. Eigentlich hat der Fall, daß $n = 1$ ist, nach unserer Erklärung keinen Sinn, denn ein Produkt hat mindestens zwei Faktoren. Es ist aber praktisch, unter a^1 die Zahl a selber zu verstehen.

2. Ist a eine positive Zahl, so ist auch das Produkt aus den n positiven Zahlen selbst positiv. Ist a eine negative Zahl, so ist die $n$te Potenz positiv, wenn n eine gerade Zahl ist, negativ, wenn n eine ungerade Zahl ist.

3. Ist a eine rationale Zahl, n eine positive ganze Zahl, so ist die Potenzierung a^n immer ausführbar.

4. Den Rechenoperationen erster und zweiter Stufe gesellt sich die Potenzierung als fünfte Rechenoperation und zwar als Rechenoperation dritter Stufe hinzu, weil sie die Multiplikation, also eine Rechenoperation zweiter Stufe, zur Grundlage hat.

Das Rechnen mit Potenzen.

5. Es ist $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$, denn 3^2 bedeutet ein Produkt aus 2 Faktoren 3, 3^5 ein solches aus 5 Faktoren. Multipliziert man beide, so erhält man ein Produkt aus 7 Faktoren 3, d. h. 3^7. Diese Überlegung zeigt das erste Potenzgesetz und seine allgemeine Herleitung

(1) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Basis mit der Summe der beiden Exponenten potenziert. a^m bedeutet nämlich ein Produkt aus m Faktoren a, a^n ein solches aus n Faktoren. Multipliziert man beide, so erhält man ein Produkt aus $m + n$ Faktoren a.

6. Es ist $3^5 : 3^2 = 3^3$; denn wenn ich in dem Bruch, in dessen Zähler das Produkt aus 5 Faktoren 3 steht, in dessen Nenner das Produkt aus 2 Faktoren 3 steht, so viel Faktoren als möglich weghebe, bleiben nur im Zähler 3 Faktoren übrig. Die gleiche Überlegung können wir anstellen, wenn im Zähler m Faktoren a, im Nenner n Faktoren a stehen. Dann heben sich n Faktoren weg, und es bleiben $m - n$ übrig. Dabei ist freilich vorauszusetzen, daß m größer als n ist, so daß überhaupt im Zähler mehr Faktoren stehen als im Nenner. Wir erhalten

(2') $$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ wenn } m > n \text{ ist.}$$

Auch wenn die Faktorenzahl im Nenner größer als im Zähler ist, kommt man zum Ziel. Wenn ich in $3^2 : 3^5$ so viel Faktoren als möglich weghebe, erhalte ich als

Ergebnis $\frac{1}{3^3}$. Allgemein werde ich, wenn die Anzahl n der Faktoren im Nenner die größere ist, die m Faktoren des Zählers wegheben, so daß als Ergebnis $n - m$ Faktoren im Nenner bleiben. Wir erhalten

(2'') $$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ wenn } n > m \text{ ist.}$$

7. Es ist

(3') $$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

(3'') $$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Zum Nachweise fasse man in dem Produkt von n Faktoren a und n Faktoren b je einen Faktor a mit einem Faktor b zu einem Produkt ab zusammen. Solcher Produkte gibt es dann n. Ebenso faßt man im Falle der Formel (3'') je einen der n Faktoren a im Zähler mit einem der n Faktoren b im Nenner zu dem Quotienten $\frac{a}{b}$ zusammen. Solcher Quotienten gibt es dann n.

Man multipliziert oder dividiert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basiszahlen multipliziert oder dividiert und das Ergebnis mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

8. Es ist

(4) $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

a^m stellt nämlich ein Produkt aus m Faktoren a dar. Das in die $n$te Potenz heben bedeutet, es $n$mal als Faktor schreiben. Dann sind aber insgesamt mn Faktoren a vorhanden.

Man potenziert eine Potenz, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

9. Die Potenzgesetze (1), (2) und (4) können wir dahin zusammenfassen, daß die Multiplikation von Potenzen gleicher Basis auf eine Addition, die Division auf eine Subtraktion, die Potenzierung auf eine Multiplikation der Exponenten herauskommt. Die mit dem Exponenten auszuführende Rechenoperation ist also jeweils eine Stufe tiefer als die mit der Potenz auszuführende.

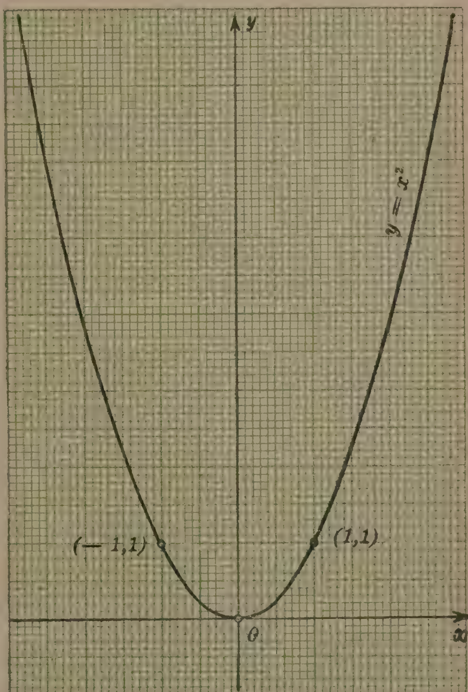


Fig. 27.

Die Funktion $y = x^n$.

10. Wir wählen zunächst $n = 2$ und erhalten dann punktweise durch Konstruktion eine Kurve (Fig. 27), die

durch den Nullpunkt und den Punkt (1, 1) geht, die x-Achse zur Tangente hat und axialsymmetrisch zur y-Achse ist. Sie verläuft ganz im ersten und zweiten Quadranten. Mit wachsendem positiven x steigt sie, ebenso mit abnehmendem negativen x. Die Kurve heißt eine **Parabel**, im engeren Sinne eine **Parabel zweiten Grades**.

11. Wählen wir $n = 3$, so erhalten wir durch Konstruktion einzelner Punkte eine Kurve (Fig. 28), die durch den Nullpunkt und den Punkt (1, 1) geht, die x-Achse zur Tangente hat, wobei aber diese Tangente die Kurve schneidet, und zentralsymmetrisch in bezug auf den Nullpunkt ist. Sie verläuft im ersten und dritten Quadranten. In ihrem ganzen Verlauf steigt die Kurve. Wir nennen auch diese Kurve eine **Parabel**, und zwar eine **Parabel dritten Grades**.

12. Die allgemeinen Parabeln $n$ten Grades, die den Funktionen $y = x^n$ entsprechen, gleichen entweder der quadratischen oder der kubischen Parabel.

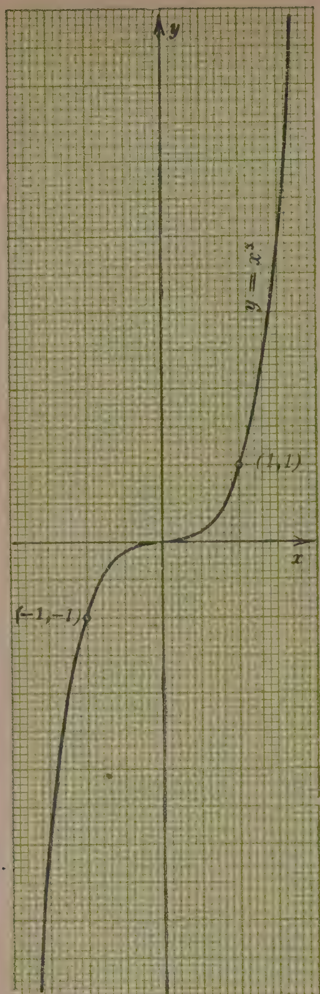


Fig. 28.

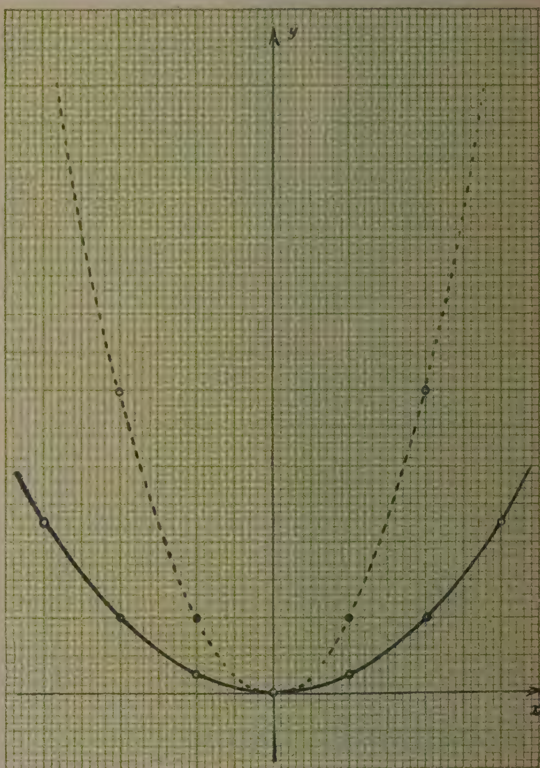


Fig. 29.

Ist n eine gerade Zahl, so ist ihr Verhalten dem der Parabeln zweiten Grades ähnlich. Sie gehen durch den Nullpunkt und die Punkte (1, 1) und (−1, 1) haben die x-Achse zur Tangente, sind axialsymmetrisch in bezug auf die y-Achse und verlaufen also im ersten und zweiten Quadranten. Ist hingegen n eine ungerade Zahl, so ist das Ver-

halten ähnlich dem der Parabel dritten Grades. Die Kurven gehen durch den Nullpunkt und die Punkte (1,1) und (—1,—1), haben die x-Achse zur durchsetzenden Tangente, sind zentralsymmetrisch in bezug auf den Nullpunkt und verlaufen also im ersten und dritten Quadranten.

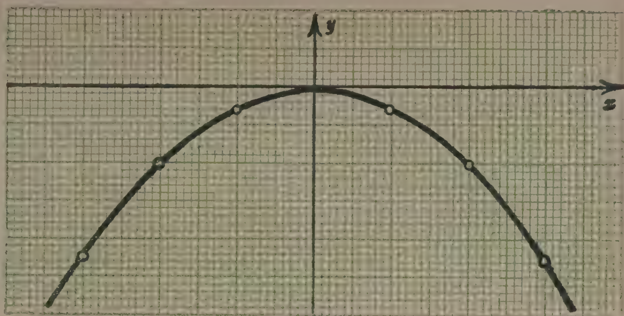


Fig. 30

Mit wachsendem n werden die Kurven außerhalb des Bereiches von $+1$ bis -1 steiler und steiler, innerhalb dieses Bereiches schmiegen sie sich mehr und mehr der x-Achse an.

13. Die Funktionen $y = ax^n$ werden gleichfalls durch Parabeln dargestellt, die aus denjenigen, die eben behandelt wurden, dadurch zu erhalten sind, daß man sie im Verhältnis $1 : a$ in der Richtung der x-Achse verzerrt. So zeigt z. B. Fig. 29 die Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$, die aus der Parabel zweiten Grades dadurch entstanden ist, daß alle y-Koordinaten auf ein Viertel verkleinert sind. Ist a positiv, so liegt auch die verzerrte Parabel im ersten und zweiten (wenn n eine gerade Zahl ist) bzw. ersten und dritten Quadranten (wenn n eine ungerade Zahl ist). Ist hingegen a negativ, so verläuft die Parabel bei geradem n im vierten und dritten, bei ungeradem n im vierten und zweiten Quadranten. Fig. 30 zeigt die Parabel $y = -\frac{1}{4}x^2$.

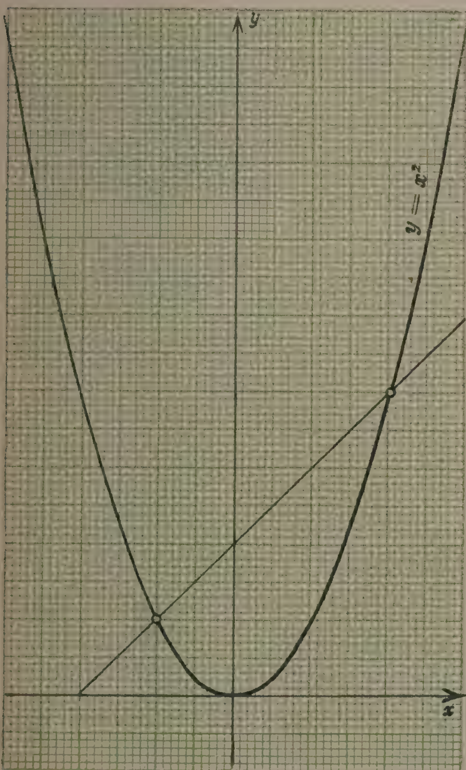


Fig 31.

Graphische Lösung von Gleichungen höheren Grades mit Hilfe der Parabeln.

14. Wir haben uns bisher in §§ 5 und 6 auf die Lösung linearer Gleichungen beschränkt. Kommt in einer Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten diese Unbekannte auch in höheren Potenzen vor, so nennt man die Gleichung eine solche vom $n$ten Grade, wenn n die höchste auftretende Potenz der Unbekannten ist. So ist z. B.

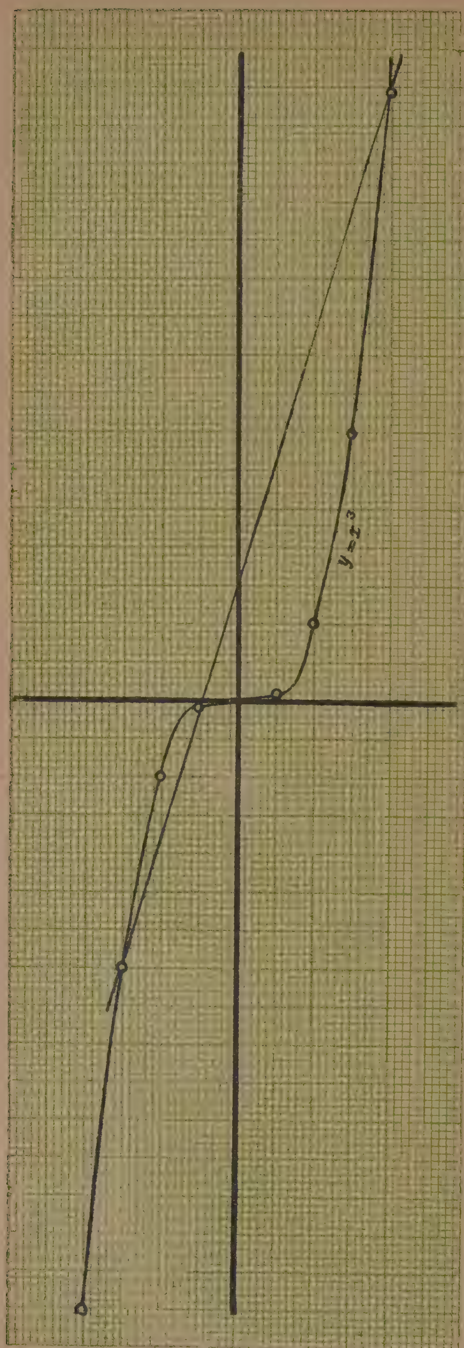


Fig. 32.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

die allgemeine Form einer **Gleichung zweiten Grades** oder einer **quadratischen** Gleichung.

$$x^3 + 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

ist eine **Gleichung dritten Grades** oder eine **kubische** Gleichung. Die rechnerische Lösung solcher Gleichungen ist mit den bisher behandelten Rechenverfahren noch nicht möglich, wohl aber werden wir in gewissen Fällen eine graphische Lösung mit Hilfe der Parabeln ableiten können.

15. Um die Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0$$

zu lösen, bringen wir die quadratische Parabel $y = x^2$ zum Schnitt mit der Geraden $y - x - 2 = 0$ (Fig. 31). Der eine Schnittpunkt habe die Koordinaten x_1, y_1. Dann ist, da dieser Punkt auf der Parabel liegt,

(1) $$y_1 = x_1^2,$$

und da er gleichzeitig auf der Geraden liegt,

(2) $$y_1 - x_1 - 2 = 0.$$

Setze ich den Wert von y_1 aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ein, so sehe ich, daß die x-Koordinate dieses Schnittpunktes die gegebene Gleichung zweiten Grades befriedigt, also eine Lösung von ihr ist. Gleiches gilt von dem anderen Schnittpunkt. Als Lösungen ergeben sich in dem in Fig. 31 dargestellten Falle $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

16. Auf die in Nr. 15 angegebene Weise kann ich jede quadratische Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

wo a, b und c bekannte Zahlenwerte sind, graphisch lösen, indem ich die Gerade

$$ay + bx + c = 0$$

zum Schnitt bringe mit der Parabel

$$y = x^2.$$

Man sieht aus der Figur 31, daß höchstens zwei Schnittpunkte vorhanden sein können; es kann aber auch der Fall eintreten, daß keine Schnittpunkte da sind. Dann hat also die quadratische Gleichung keine Lösungen. Einen Grenzfall erhalten wir dann, wenn die Gerade Tangente an die Kurve wird; dann ist nur eine Lösung vorhanden.

Auch diese graphische Lösung hat die Mängel aller solcher Methoden; man ist in der Genauigkeit auf die Güte der Zeichnung und auf den verwendbaren Maßstab angewiesen. Vor der Hand aber fehlt uns eine andere, rechnerische Lösung.

17. Eine kubische Parabel gibt uns in genau der gleichen Weise die Möglichkeit, kubische Gleichungen der Form

$$ax^3 + bx + c = 0$$

zu lösen, wenn a, b und c zahlenmäßig gegebene Werte sind. Man bringt die kubische Parabel

$$y = x^3$$

zum Schnitt mit der Geraden

$$ay + bx + c = 0.$$

Fig. 32 zeigt als Beispiel die graphische Lösung der Gleichung

$$x^3 - 3\tfrac{1}{4}x - 1\tfrac{1}{2} = 0,$$

die die Wurzeln $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -1\frac{1}{2}$ hat, wie man aus den x-Koordinaten der Schnittpunkte abliest.

Aus dem Verlauf der kubischen Parabel sieht man, daß solche Gleichungen entweder drei oder eine Wurzel haben — abgesehen von den Fällen, wo die Gerade die Kurve berührt.

18. Allgemein kann man nach diesem Verfahren Gleichungen der Form

$$ax^n + bx + c = 0$$

graphisch lösen, indem man eine Parabel $n$ten Grades $y = x^n$ zum Schnitt bringt mit einer Geraden $ay + bx + c = 0$.

§ 8. Potenzen mit negativen ganzen Exponenten.

Begriff der Potenz mit negativem Exponenten.

1. Wenn im Exponenten einer Potenz irgendein mehrgliedriger Ausdruck, etwa $m - n$ steht, so muß man, damit die Potenz überhaupt eine Bedeutung hat, noch angeben, daß jener Ausdruck einen positiven Wert hat. Um von dieser Nebenbedingung frei zu kommen, erklärt man den Begriff der Potenz auch für negative Exponenten und für den Exponenten 0. Man definiert, wenn $a \neq 0$ ist,

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Die Potenzgesetze für negative Exponenten.

2. Wir zeigen zunächst, daß bei Zugrundelegung der in Nr. 1 festgesetzten Definitionen die Potenzgesetze auch für negative Exponenten n und m gelten. Es sei $n = -p$ und $m = -q$, wo p und q jetzt positive Zahlen sind, dann ist

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-p-q}.$$

Ähnlich kann man in dem Falle, wo nur einer der Exponenten negativ, der andere positiv ist, die Richtigkeit des Gesetzes

(1) $$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

nachweisen.

Es ist $$a^{-p} : a^{-q} = \frac{1}{a^p} : \frac{1}{a^q} = a^{-p} \cdot a^q = a^{-p+q}.$$

Auch wenn nicht beide Potenzen, sondern nur die eine einen negativen Exponenten hat, läßt sich die Rechnung in gleicher Weise durchführen, und man erhält als Ergebnis, daß auch für negative Exponenten n und m das Gesetz

(2) $$a^n : a^m = a^{n-m}$$

gilt. Dabei ist es nun nicht mehr nötig, zwei Fälle zu unterscheiden wie seinerzeit, als wir den Potenzbegriff nur für positive Exponenten erklärt hatten (vgl. § 7, Nr. 6).

Auch die beiden Fälle des dritten Potenzgesetzes lassen sich durch Rechnung bestätigen, es ist

(3′) $$a^{-n} \cdot b^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{(ab)^n} = (ab)^{-n},$$

(3″) $$a^{-n} : b^{-n} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}.$$

Das vierte Potenzgesetz schließlich wollen wir zunächst für den Fall, daß einer der auftretenden Exponenten negativ ist, durch Rechnung beweisen. Es ist

$$(a^{-p})^m = \left(\frac{1}{a^p}\right)^m = \frac{1}{a^{pm}} = a^{-pm},$$

und ebenso ist $$(a^n)^{-q} = \frac{1}{(a^n)^q} = \frac{1}{a^{nq}} = a^{-nq}.$$

Wenn beide Exponenten negativ sind, so läßt sich mit dem eben Besprochenen die Rechnung durchführen; es ist

$$(a^{-p})^{-q} = \frac{1}{(a^{-p})^q} = \frac{1}{a^{-pq}} = a^{pq}.$$

Damit ist bewiesen, daß auch das vierte Potenzgesetz

(4) $$(a^n)^m = a^{nm}$$

gilt, wenn einer der Exponenten oder beide negativ sind.

3. Um nachzuweisen, daß die Potenzgesetze auch für den Exponenten 0 gelten, setzt man für a^0 den Wert 1 ein (Nr. 1) und rechnet damit. Man findet also z. B. beim Gesetz (1) $$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0};$$

ebenso im Falle des Gesetzes (2). Ist auch der andere Exponent $m = 0$, so sagen die Gesetze nur aus, daß $1 \cdot 1 = 1$ und $1 : 1 = 1$ ist. Die gleiche Form nehmen die Gesetze (3) an, wenn der auftretende Exponent 0 wird. Auch im Falle des letzten Gesetzes erhält man beiderseits den Wert 1, gleichgültig, ob m oder n Null wird.

4. Die Zweckmäßigkeit der Definition des Potenzbegriffes für negative Exponenten ergibt sich schon daraus, daß jetzt die alten Potenzgesetze sämtlich erhalten bleiben, was nicht der Fall gewesen wäre, wenn wir eine andere Definition gewählt hätten.

Es wurde schon erwähnt, daß eine Unterscheidung von zwei verschiedenen Fällen beim zweiten Gesetz jetzt überflüssig geworden ist. Nach der Erweiterung des Potenzbegriffes fallen aber auch genau genommen die beiden ersten Gesetze in eines zusammen, denn der Ausdruck $a^n : a^m$ ist ja jetzt mit dem Ausdruck $a^n \cdot a^{-m}$ gleichbedeutend. Ebenso fallen die beiden Fälle des dritten Potenzgesetzes in einen zusammen, wenn man berücksichtigt, daß für $\frac{a}{b}$ das Produkt $a \cdot \frac{1}{b}$ geschrieben werden kann. Die Potenzgesetze beschränken sich mithin auf die folgenden nun für positive und negative ganze Exponenten geltenden drei:

(I) $$a^m \cdot a^n = a^{n+m},$$

(II) $$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

(III) $$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Die Funktion $y = x^{-n}$.

5. Wir wählen zunächst $n = 1$ und erhalten dann durch Konstruktion einzelner Punkte eine Kurve (Fig. 33), die durch die Punkte $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ geht und für $x = 0$ eine Unendlichkeitsstelle hat. Die beiden Äste, aus denen sich die Kurve zusammensetzt, liegen im ersten und dritten Quadranten, sind zentralsymmetrisch in bezug auf den Nullpunkt und achsialsymmetrisch in bezug auf die beiden Winkelhalbierenden des Koordinatensystems; sie haben die x-Achse und die y-Achse zu Asymptoten. Die Kurve heißt eine Hyperbel, im besonderen Falle $n = 1$ eine gleichseitige Hyperbel zweiten Grades.

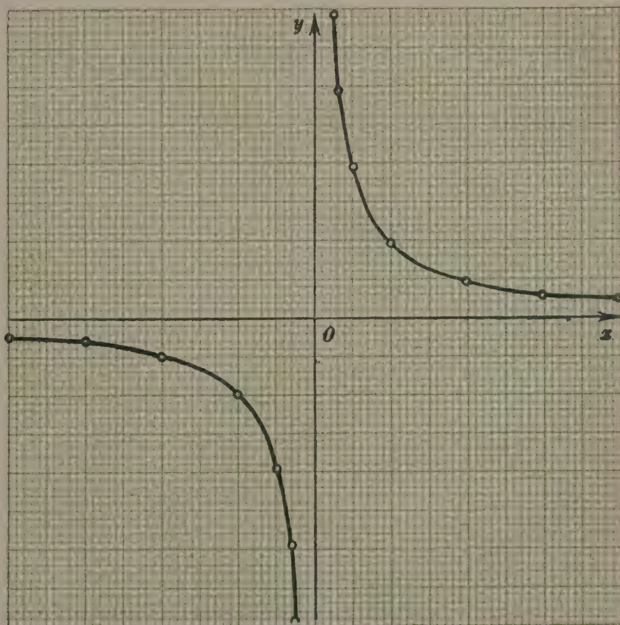


Fig. 33.

6. Wählen wir $n = 2$, so erhalten wir

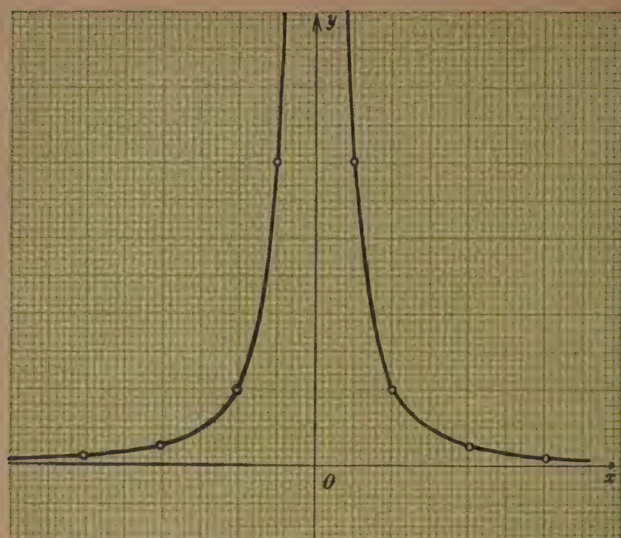


Fig. 34.

durch Konstruktion einzelner Punkte eine Kurve (Fig. 34), die durch die Punkte (1, 1) und (— 1, + 1) geht und für $x = 0$ eine Unendlichkeitsstelle hat. Die beiden Äste, aus denen sich die Kurve zusammensetzt, liegen im ersten und zweiten Quadranten; sie sind achsialsymmetrisch in bezug auf die y-Achse. Sie haben die x-Achse und die y-Achse zu Asymptoten. Die Kurve heißt eine Hyperbel dritten Grades.

7. Die allgemeinen Hyperbeln $(n + 1)$ten Grades, die den Funktionen $y = x^{-n}$ entsprechen, ähneln entweder der Hyperbel zweiten oder derjenigen dritten Grades, je nachdem, ob der Exponent ungerade oder gerade ist. Ist n ungerade, dann gehen die Kurven durch die Punkte (1, 1) und (— 1, — 1) und haben im Nullpunkt eine Unendlichkeitsstelle; die beiden Äste liegen im ersten und dritten Quadranten, sind zentralsymmetrisch in bezug auf den Nullpunkt und haben die x-Achse und die y-Achse zu Asymptoten. Ist n gerade, dann gehen die Hyperbeln durch die Punkte (1, 1) und (— 1, + 1) und haben im Nullpunkt eine Unendlichkeitsstelle; die beiden Äste liegen im ersten und zweiten Quadranten, sind achsialsymmetrisch in bezug auf die y-Achse und haben die beiden Koordinatenachsen zu Asymptoten.

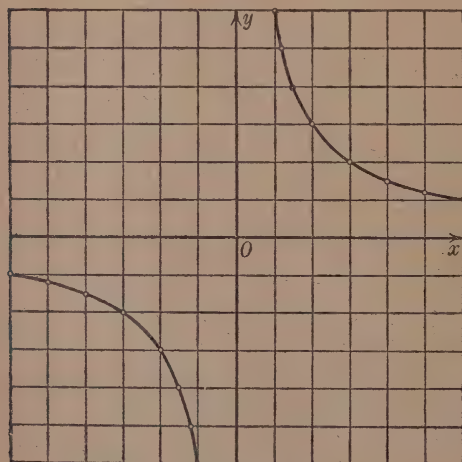


Fig. 35.

8. Den Funktionen $y = ax^{-n}$ entsprechen Kurven, die aus den eben besprochenen Hyperbeln durch Verzerrung entstanden sind; alle y-Koordinaten sind im Verhältnis $1 : a$ zu verlängern. In Fig. 35 ist die Funktion $y = \frac{6}{x}$ dargestellt.

Graphische Lösung von Bruchgleichungen.

9. Eine Gleichung der Form

$$\frac{a}{x} + bx + c = 0$$

können wir mit unseren bisherigen Mitteln arithmetisch noch nicht lösen.

denn wenn wir die Gleichung mit x multiplizieren, kommen wir auf eine Gleichung zweiten Grades. Wie im vorigen Kapitel die Parabeln, so geben uns jetzt aber die Hyperbeln eine graphische Lösungsmethode an die Hand. Man bringt die Hyperbel

$$y = \frac{1}{x}$$

zum Schnitt mit der Geraden

$$ay + bx + c = 0,$$

dann genügen die Koordinaten der Schnittpunkte beiden Gleichungen und die x-Koordinaten sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

10. Die gleichen Überlegungen wie oben führen zur graphischen Lösung einer Gleichung

$$\frac{a}{x^n} + bx + c = 0,$$

indem man die Hyperbel

$$y = \frac{1}{x^n}$$

zum Schnitt bringt mit der Geraden

$$ay + bx + c = 0.$$

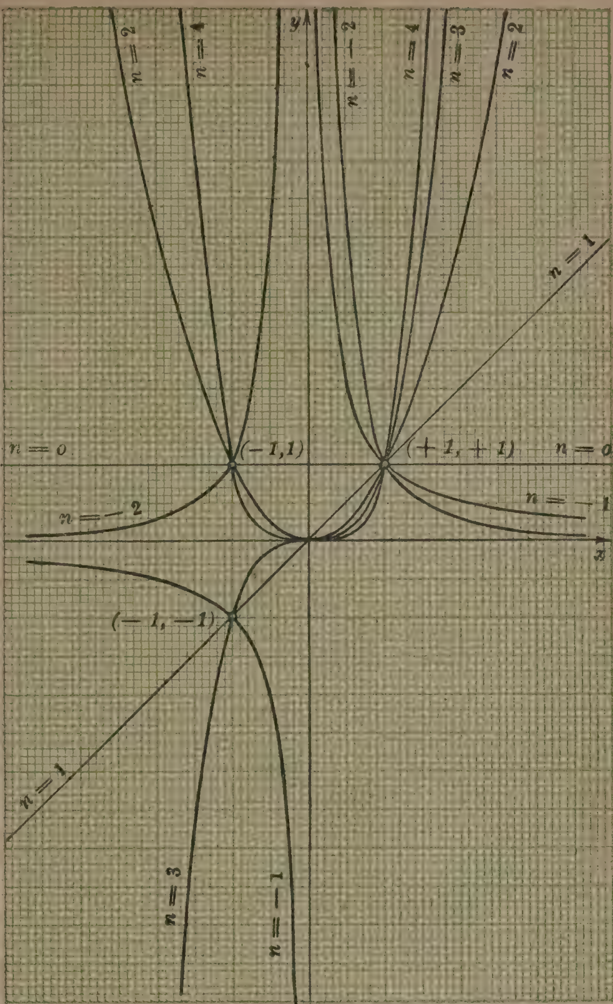


Fig. 36.

Damit hat man natürlich auch die Möglichkeit, die Gleichung

$$px^n + qx^{n-1} + r = 0$$

zu lösen. Man braucht die Gleichung nur durch x^{n-1} zu dividieren, um auf eine Gleichung der eben behandelten Form zu kommen.

Die Schar der Kurven $y = x^n$.

11. Wir beherrschen jetzt die Gestalt der Kurven $y = x^n$, wenn n irgendeinen positiven oder negativen ganzzahligen Wert annimmt. In Fig. 36 ist die Kurven-

schar für alle Werte n von $+4$ bis -2 gezeichnet Unter ihnen sind zwei Geraden, nämlich $y = x^1$ und $y = x^0 = 1$.

§ 9. Wurzeln.

Begriff der Wurzel.

1. Wenn $a^n = b$ ist, so nennt man a auch die $n$te Wurzel aus b und schreibt $a = \sqrt[n]{b}$. $\sqrt[n]{b}$ ist also die Zahl, die in die $n$te Potenz erhoben b ergibt. So folgt beispielsweise aus $3^4 = 81$, daß 3 die vierte Wurzel aus 81 ist; man schreibt $\sqrt[4]{81} = 3$. In dem Ausdruck $\sqrt[n]{b}$ heißt b der Radikand, n der Wurzelexponent. Ist der Wurzelexponent 2, so spricht man von einer Quadratwurzel und läßt den Exponenten weg. Ist $n = 3$, so sagt man oft Kubikwurzel statt dritte Wurzel.

2. Das Radizieren ist im Bereiche der rationalen Zahlen nur möglich, wenn der Radikand eine $n$te Potenz ist. In manchen Fällen erhält man zwei Werte für die Wurzel. So ist beispielsweise $\sqrt{4}$ sowohl $+2$ wie -2, denn es ist $(+2)^2 = 4$ wie auch $(-2)^2 = 4$. Andererseits ist die Wurzel nicht immer zweideutig. So ist beispielsweise $\sqrt[3]{27}$ nur $+3$. Keine andere uns bisher bekannte Zahl gibt, in die dritte Potenz erhoben, 27, auch nicht etwa -3.

Begriff der Irrationalzahl.

3. Wir weisen zunächst nach, daß die $n$te Wurzel aus einer ganzen Zahl, die nicht eine ganze Zahl ist, auch nicht eine gebrochene Zahl sein kann. Wäre nämlich $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$, wo die ganzen Zahlen p und q durch Kürzen bereits von allen gemeinschaftlichen Teilern befreit sind, so müßte die Gleichung

$$a = \frac{p^n}{q^n}$$

bestehen. Der Bruch rechts läßt sich nicht weiter kürzen, da p und q teilerfremd waren. Da aber die ganze Zahl a nicht einer gebrochenen Zahl gleich sein kann, ist unsere Annahme falsch gewesen.

4. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, wo der Radikand eine positive rationale Zahl ist. Wir nehmen eine abermalige Erweiterung des Zahlbereiches vor, indem wir zu den rationalen die irrationalen Zahlen hinzufügen und als solche irrationale Zahlen zunächst diejenigen ansehen, die aus positiven rationalen Zahlen durch Radizierung entstehen. Ist der Radikand negativ, so unterscheiden wir zwei Fälle. Bei ungeradem Wurzelexponenten kommen wir mit den eben eingeführten Irrationalzahlen aus, nur sind diese nicht positiv, sondern negativ. Den Fall des geraden Wurzelexponenten und negativen Radikanden besprechen wir später in Nr. 27.

5. Die irrationalen Zahlen stellen wir als Dezimalbrüche dar. Diese Dezimalbrüche sind unendlich, denn wären sie endlich, so würden es rationale Zahlen sein; sie sind unperiodisch, denn wären sie periodisch, so würden es auch rationale Zahlen sein. Den Wert der Irrationalzahlen nähern wir durch endliche Dezimalbrüche an, die so beschaffen sind, daß die Stellenzahl, bis zu der ich den Dezimalbruch ausrechne, so groß sein kann, wie ich vorschreibe.

6. Näherungswerte für nicht rationale Wurzeln kann ich zunächst graphisch finden. Um $\sqrt[n]{a}$, wo a irgendeine rationale Zahl ist, graphisch zu bestimmen, suche ich in der Parabel $y = x^n$ denjenigen Punkt auf, für den y den Wert a erreicht. Dann gestattet die Kurve, den zugehörigen Wert x angenähert abzulesen. Um z. B. $\sqrt[3]{2}$ zu bestimmen, suche ich den Punkt auf, in dem die Funktion $y = x^3$ den Wert 2 erreicht Das ist, wie die Kurve Fig. 98 zeigt, etwa 1,25.

Diese graphische Methode gibt nur sehr rohe Näherungswerte, wenn man nicht die Funktionen in sehr großem Maßstabe darstellen will. Wir werden also dazu veranlaßt, nach arithmetischen Verfahren zu suchen, die eine rechnerische Bestimmung der Wurzelwerte gestatten. Diese Aufgabe wird im folgenden Abschnitt zunächst für Quadratwurzeln gelöst.

Berechnung der Quadratwurzeln.

7. Die Ausrechnung der Quadratwurzel werde zuerst an einem Beispiel gezeigt, in dem die Wurzel aufgeht. Wir schreiben zunächst den Wurzelalgorithmus so, wie er in ausführlicher Darstellung sich ergibt:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{11'90'25} = 345 \\
\underline{9} \\
\ \ 2\,9'0 : 64 \\
\ \ \underline{2\,5\,6} \\
\ \ \ \ 3\,4\,2'5 : 685 \\
\ \ \ \ \underline{3\,4\,2\,5} \\
\ \ \ \ \ \ \ -
\end{array}
$$

Um die Bedeutung der einzelnen Zahlen klarzulegen, ist im Folgenden jede Zahl voll ausgeschrieben und in ihrem Aufbau kenntlich gemacht. Außerdem aber ist die allgemeine Methode dadurch gekennzeichnet, daß links und rechts daneben das Verfahren in allgemeinen Zahlen angedeutet ist.

$$
\begin{array}{lll}
 & \sqrt{11'90'25} = 300 + 40 + 5 & a + b + c \\
a^2 & \underline{9\,00\,00} & \\
 & 2\,90\,25 : (600 + 40) & 2a + b \\
(2a+b)\cdot b & \underline{2\,56\,00} & \\
 & 34\,25 : (600 + 80 + 5) & 2a + 2b + c \\
(2a+2b+c)c & \underline{34\,25} & \\
 & - &
\end{array}
$$

Dem Algorithmus liegt also die Zerlegung zugrunde:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c.$$

Ist der Radikand 7- oder 8stellig, so wird die Zerlegung

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c + (2a+2b+2c+d)d$$

benutzt. Die Zerlegung läßt sich leicht auf eine beliebig große Stellenzahl ausdehnen.

8. Das gleiche Verfahren liefert nun auch in den Fällen, wo die Quadratwurzel nicht aufgeht, Näherungswerte in Gestalt von Dezimalbrüchen. So wird bei-

spielsweise, wenn ich mich mit einem Näherungswert von 5 Ziffern begnüge (unter Berücksichtigung der sechsten Ziffer), das folgende Rechenschema I. Man kann den Wurzelalgorithmus wesentlich abkürzen, indem man wie bei der abgekürzten Division von einer geeigneten Ziffer an abgekürzt weiterrechnet. Das Beispiel nimmt dann, wenn es sich wieder um einen fünfziffrigen Näherungswert handeln soll, die Gestalt II an.

I. $\sqrt{2} = 1{,}4142$	II. $\sqrt{2} = 1{,}4142$
1	1
100 : 24	100 : 24
96	96
400 : 281	400 : 281
281	281
11900 : 2824	119 : 28,2
11296	113
60400 : 28282	6 : 2,8
56564	6
3836	—

9. An der Hand der in Nr. 7 dargestellten Formeln gestaltet sich die Berechnung der Quadratwurzel aus einem allgemeinen Ausdruck wie folgt:

$$\sqrt{49a^4-42a^3b+37a^2b^2-12ab^3+4b^4}=\overbrace{7a^2}^{x}-\overbrace{3ab}^{y}+\overbrace{2b^2}^{z}$$

$$x^2=49a^4$$

$$-42a^3b+37a^2b^2-12ab^3+4b^4:14a^2$$

$$(2x+y)y=\quad -42a^3b+\ \ 9a^2b^2$$

$$28a^2b^2-12ab^3+4b^4:14a^2-6ab$$

$$(2x+2y+z)z=\quad 28a^2b^2-12ab^3+4b^4$$

Das Rechnen mit Irrationalzahlen.

10. Auch die $n$ten Wurzeln aus rationalen Zahlen kann man in Gestalt von Dezimalbrüchen mit beliebiger Genauigkeit annähern. Um das zu zeigen, bestimme man zunächst in irgendeinem vorgelegten Fall, zwischen welchen ganzen Zahlen die Wurzel liegt. Dann bestimmt man ebenso durch Probieren, zwischen welchen auf Zehnteln genauen Werten die gesuchte Zahl liegt usf. Um z. B. $\sqrt[3]{2}$ zu berechnen, stellt man fest, daß die Zahl zwischen 1 und 2 liegt; sie liegt weiter zwischen 1,2 und 1,3, denn die dritte Potenz von 1,2 ist 1,728, also kleiner als 2, die dritte Potenz von 1,3 ist 2,197, also größer als 2. Ebenso findet man, daß die gesuchte Zahl weiter zwischen 1,25 und 1,26 liegt, denn die dritte Potenz der ersteren Zahl ist kleiner, die der zweiten größer als 2. Auf diese Art kann man beliebig weit mit der Feststellung der Näherungswerte gehen.

11. Für das Rechnen mit Irrationalzahlen gilt allgemein die Regel, daß man statt mit den Zahlen selbst mit ihren Näherungswerten rechnet. Dabei erhält man dann Näherungswerte der gesuchten Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten. Auch beim Potenzieren verfährt man so, wenn die Basis eine Irrationalzahl ist, und beim Radizieren, wenn der Radikand eine Irrationalzahl ist.

Das Vorzeichen der Wurzel.

12. Eine Schwierigkeit, der wir zunächst bei der Quadratwurzel begegneten, besteht darin, daß Wurzeln unter Umständen mehrdeutig sein können. Es ergibt sich, daß eine solche Mehrdeutigkeit nicht vorhanden ist, wenn der Wurzelexponent eine ungerade Zahl ist. Ist hingegen der Wurzelexponent eine gerade Zahl, so gibt es stets zwei Zahlen, die nach unserer bisherigen Definition der Wurzel als deren Wert anzusehen sind. Wie die Quadratwurzel aus 4 sowohl den Wert $+2$ wie den Wert -2 haben kann, so auch bei allen anderen Wurzeln mit geraden Exponenten. Ist nämlich b eine etwa nach Nr. 10 näherungsweise bestimmte Wurzel $\sqrt[n]{a}$, so ist, wenn n geradzahlig ist, $-b$ gleichfalls ein Wert der Wurzel, denn wenn $(+b)^n = a$ ist, dann ist auch $(-b)^n = a$.

13. Um den Wurzelausdrücken die unter Umständen vorhandene Zweideutigkeit zu nehmen, bezeichnet man, wenn a positiv und n gerade ist, mit dem Symbol $\sqrt[n]{a}$ nur die positive Zahl, die in die $n$te Potenz erhoben den Wert a ergibt. Man nennt diesen Wert den Hauptwert der Wurzel. So hat also $x^n = a$, wo a eine positive Zahl, n eine gerade ganze Zahl ist, zwei Lösungen $x = +\sqrt[n]{a}$ und $x = -\sqrt[n]{a}$. Beide faßt man auch mit der Schreibweise $x = \pm\sqrt[n]{a}$ zusammen.

Die graphische Darstellung der Wurzelfunktion.

14. Wenn man einen Punkt P_1 mit den Koordinaten x_1 und y_1 an der Geraden $y = x$, also der Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen (genauer der positiven Richtungen der Koordinatenachsen), spiegelt, so erhält man einen Punkt, der die Koordinaten y_1 und x_1 hat. Die beiden Koordinaten sind also vertauscht (Fig. 107). Wenn man in gleicher Weise irgendeine Kurve an der Geraden $y = x$ spiegelt, so werden ebenfalls x- und y-Koordinate miteinander vertauscht. So wird z. B. aus der Geraden $y = ax$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ die Kurve $x = ay$ oder, nach y aufgelöst, $y = \frac{x}{a}$. In Fig. 108 ist $a = 2$ genommen.

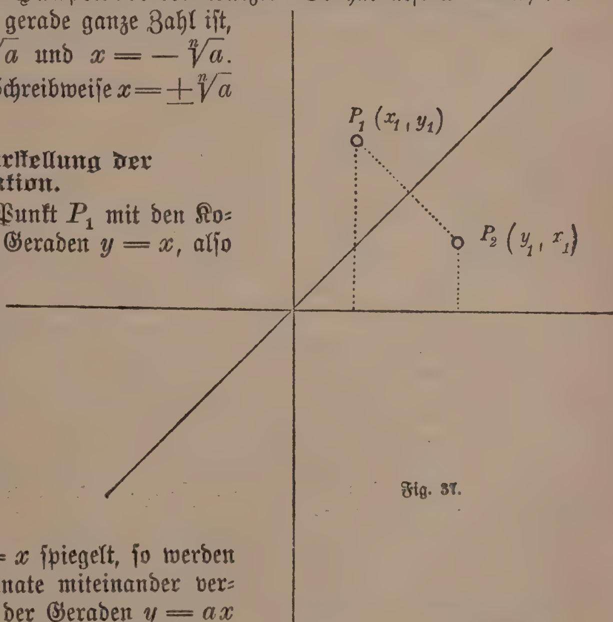


Fig. 37.

15. Diese Beziehung benutzen wir, um die Quadratwurzelkurve abzuleiten.

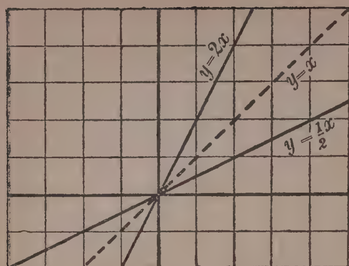


Fig. 38.

Wenn ich nämlich die Kurve $y=x^2$, die in § 7 Nr. 10 besprochene quadratische Parabel, an der Geraden $y=x$ spiegele, so erhalte ich eine Kurve (Fig. 109), deren Funktionsgleichung $x=y^2$ lautet, oder wenn ich diese Funktion nach y auflöse, die Quadratwurzelkurve $y=\pm\sqrt{x}$.

16. Genau so kann man verfahren, um die Wurzelfunktionen $y=\sqrt[n]{x}$ zu finden. Man spiegelt die Funktion $y=x^n$ an der Winkelhalbierenden. Zur Schreibweise der Wurzelfunktion ist übrigens zu bemerken, daß bei ungeradem Wurzelexponenten nur das positive Vorzeichen, bei geradem Wurzelzeichen aber das positive und das negative Wurzelzeichen zu benutzen ist (vgl. die Festlegung in Nr. 13).

Natürlich hätte man die Wurzelkurven auch unmittelbar durch Berechnung von Einzelwerten punktweise konstruieren können.

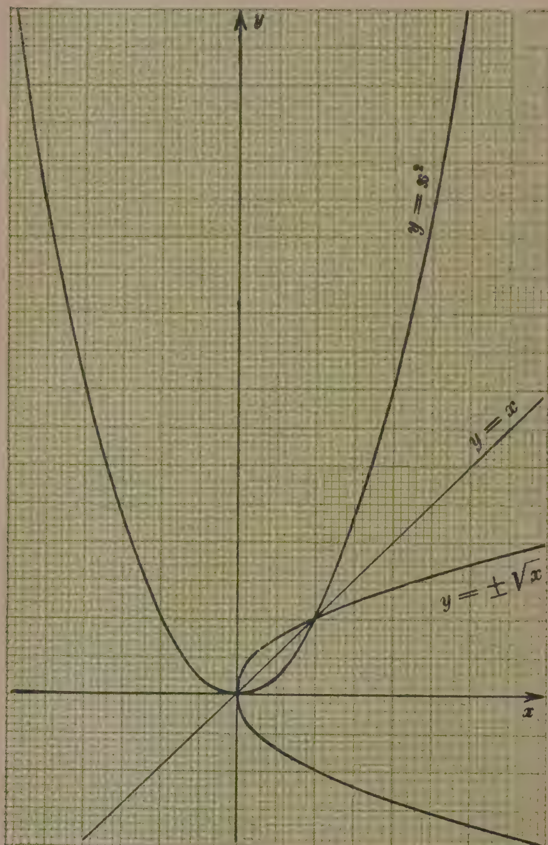


Fig. 39.

Die Wurzelgesetze.

17. Wenn es sich um Wurzeln aus bestimmten Zahlen handelt, so ist mit dem in Nr. 11 Gesagten bereits die Frage beantwortet, wie man mit diesen Zahlen rechnet. Anders, wenn es sich um Wurzeln aus Buchstabenausdrücken handelt. Dann müssen besondere Gesetze entwickelt werden, die eine Umformung und Vereinfachung der Wurzelausdrücke gestatten. Es ist

(1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.

Um das zu beweisen, erinnern wir uns, daß $\sqrt[n]{ab}$ die Zahl ist, die in die $n$te Potenz erhoben $a\cdot b$ ergibt. Erheben wir aber $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ in die $n$te Potenz, so erhalten wir $(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n$, und das ist in der Tat $a\cdot b$, denn $\sqrt[n]{a}$ bedeutete ja die Zahl, die in die $n$te Potenz erhoben a ergibt und entsprechend $\sqrt[n]{b}$ die Zahl, die in die $n$te Potenz erhoben b ergibt.

18. Zu dem Beweis in Nr. 17 sind zwei Bemerkungen zu machen. Einmal haben wir in ihm ohne weiteres angenommen, daß die uns bekannten, für rationale Zahlen gültigen Rechengesetze auch für die Wurzelzahlen gelten. Wir haben z. B. benutzt, daß man auch ein Produkt aus irrationalen Zahlen in der Weise potenzieren kann, daß man jeden Faktor potenziert und das Produkt bildet. Wollten wir ganz streng verfahren, so hätten wir erst alle die Gesetze der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzierung zusammenstellen müssen, deren Gültigkeit wir von den rationalen Zahlen auf irrationale ausdehnen.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf einen Einwand, den man gegen unser Beweisverfahren machen kann. Ich könnte in der gleichen Weise nachweisen, daß $+3 = -3$ ist. Ich erhebe beide Zahlen ins Quadrat und erhalte ein richtiges Ergebnis $9 = 9$. Und doch ist die Ausgangsgleichung falsch. Ich kann also nicht ein Gesetz in der Weise als richtig erweisen, daß ich mit ihm irgendwelche richtige Rechenoperationen ausführe und dabei auf ein richtiges Ergebnis komme. Nichts anderes habe ich aber eben getan. Die Schwierigkeit wird dadurch behoben, daß, weil wir uns bei der Einführung des Wurzelsymbols auf den Hauptwert beschränkt und damit die Eindeutigkeit der Rechenoperation erreicht haben (vgl. Nr. 13), aus der Gleichheit der $n$ten Potenzen auch auf die Gleichheit der Basen geschlossen werden kann.

19. Es ist

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \tag{2}$$

Um dies Gesetz zu beweisen, erheben wir beide Seiten in die $n$te Potenz und kommen dann auf eine identisch richtige Gleichung.

20. Auch das folgende Gesetz läßt sich auf die gleiche Weise wie oben beweisen:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}. \tag{3}$$

Die rechte Seite gibt nämlich in die $n$te Potenz erhoben a^m. Wenn ich die linke Seite in die $n$te Potenz erhebe, erhalte ich zunächst $(\sqrt[n]{a})^{nm}$, da aber $(\sqrt[n]{a})^n$ nach der Wurzeldefinition a ist, so erhalte ich auch links den Ausdruck a^m.

21. Eine Möglichkeit, Wurzeln aus Potenzen zu vereinfachen, gibt das folgende Gesetz

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{4}$$

Der Beweis ist wieder in der Weise zu führen, daß man beide Seiten in die npte Potenz erhebt. Dann erhält man beiderseits a^{mp}.

22. Über die Radizierung von Wurzeln gibt das folgende Gesetz Auskunft:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{5}$$

Die Richtigkeit folgt aus der Gleichung, die man erhält, wenn man alle drei Ausdrücke in die mnte Potenz erhebt.

Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

23. Der Begriff der Potenz war bisher nur erklärt für positive (§ 7) und negative (§ 8) ganze Exponenten. Wir erklären ihn jetzt auch für gebrochene Zahlen durch die Gleichung

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Ist $q = 1$, so deckt sich diese Definition mit der früheren.

24. Die Potenzgesetze (§ 8, Nr. 4) gelten bei Zugrundelegung der in Nr. 23 aufgestellten Definition auch für die Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Es seien p, q, r und s irgendwelche ganze Zahlen. Da wir den Begriff der Wurzel nur für positive Wurzelexponenten erklärt haben, setzen wir noch voraus, daß q und s positiv sind. Dann ist

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r}$$

nach der Erklärung des Potenzbegriffes für gebrochene Exponenten,

$$\sqrt[q]{a^p} \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \sqrt[qs]{a^{qr}}$$

nach dem vierten Wurzelgesetz,

$$\sqrt[qs]{a^{ps}} \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} a^{qr}}$$

nach dem ersten Wurzelgesetz. Den Radikanden kann man auch a^{ps+rq} schreiben. Mithin wird, wenn ich wieder die Schreibweise als gebrochene Potenz anwende,

$$\sqrt[qs]{a^{ps} a^{qr}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}}.$$

Nun ist aber der Exponent auch in der Form $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ zu schreiben, man erhält also schließlich

(I) $$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}.$$

25. Um nachzuweisen, daß

(II) $$(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}$$

ist, genügt die Feststellung, daß nach dem ersten Wurzelgesetz

$$\sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p}$$

ist.

26. Schließlich beweisen wir

(III) $$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}.$$

In der Tat ist nach dem dritten und fünften Wurzelgesetz

$$\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[sq]{a^{pr}}.$$

Begriff der komplexen Zahl.

27. Es bleibt noch der Fall zu erörtern, daß der Radikand einer Wurzel mit geradem Wurzelexponenten negativ ist. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf Quadratwurzeln. Im Bereiche der rationalen und irrationalen Zahlen ist eine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht zu finden. Denn irgendeine solche Zahl, sei sie positiv oder negativ, liefert ins Quadrat erhoben stets eine positive Zahl. Wir sehen uns also zur Einführung neuer Zahlen gezwungen. Man nennt die neuen Zahlen imaginäre (genauer rein-imaginäre) Zahlen. Zur Abkürzung der Schreibweise führt man das Symbol $\sqrt{-1} = i$ ein. Dann kann man irgendeine imaginäre Zahl $\sqrt{-a}$ auf die Form $i\sqrt{a}$ bringen, sie also als das Produkt der imaginären Einheit mit der gleichen Wurzel, aber mit positivem Radikanden darstellen.

Wir haben dabei das in Nr. 17 behandelte Gesetz auch im Falle der imaginären Zahlen angewandt.

28. Hinsichtlich des Rechnens mit imaginären Zahlen begnügen wir uns mit einigen wenigen Bemerkungen. Die Addition oder Subtraktion von zwei imaginären Zahlen wird durch die Gleichung

$$ai + bi = (a + b)i$$

angegeben. Die Summe oder Differenz einer reellen und einer imaginären Zahl kann man nicht weiter vereinfachen, es bleibt

$$a + bi = a + bi.$$

Das Produkt einer reellen Zahl mit einer imaginären ergibt sich aus den Gleichungen

$$a \cdot bi = abi; \quad ai \cdot b = abi.$$

Wenn man zwei imaginäre Zahlen miteinander multipliziert, muß man beachten, daß $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ ist. Es ergibt sich also

$$ai \cdot bi = -ab.$$

Auf Grund der Multiplikationsregel läßt sich auch das Verfahren bei der Division angeben.

29. Einen Ausdruck, der aus einer reellen und einer imaginären Zahl besteht, nennt man eine komplexe Zahl. Eine solche hat die Gestalt $a + bi$, wo a und b rationale oder irrationale Zahlen sind. Man pflegt das reelle Glied an erste Stelle, das imaginäre an zweite Stelle zu setzen, es ist aber an und für sich

$$a + bi = bi + a.$$

Aus den Rechenregeln über die imaginären Zahlen ergeben sich auch die für die komplexen Zahlen. Es ist

(1) $$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

und

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2$$

und also unter Beachtung von $i^2 = -1$

(2) $$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Diese beiden Rechenregeln gehen in die bekannten Rechengesetze für reelle Zahlen über, wenn die imaginären Teile wegfallen; ebenso gehen sie in die Gesetze für imaginäre Zahlen über, wenn die rellen Teile wegfallen.

30. Stimmen zwei Zahlen in den reellen Teilen überein, und haben die imaginären Teile gleichen absoluten Wert, aber entgegengesetztes Vorzeichen, so nennt man die Zahlen konjugiert komplex. $a + bi$ und $a - bi$ sind konjugiert komplexe Zahlen. Die Regeln von Nr. 29 zeigen, daß die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen $a + bi$ und $a - bi$ den reellen Wert $2a$, das Produkt den reellen Wert $a^2 + b^2$ hat.

Überblick über die allmähliche Entwicklung des Zahlbereichs.

31. In § 4, Nr. 13 hatten wir gesehen, wie der Bereich der natürlichen Zahlen allmählich bis zu den rationalen Zahlen erweitert wird, damit die vier rationalen Rechenoperationen stets ausführbar sind Diese Entwicklung ist im vor-

liegenden Paragraphen fortgeführt worden. Der Begriff der Wurzel hat uns veranlaßt, zunächst den rationalen Zahlen die irrationalen Zahlen an die Seite zu stellen. Den gesamten Bereich der rationalen und irrationalen Zahlen nennen wir den Bereich der reellen Zahlen. Den Zahlbereich haben wir dann ein zweites Mal erweitert, indem wir die imaginären Zahlen hinzufügten. Wir sind damit zu dem allgemeinsten Zahlbereich gekommen, dem der komplexen Zahlen, der alle vorher genannten Bereiche in sich birgt.

32. Im rationalen Zahlbereich gewannen wir insofern einen Abschluß, als wir feststellten, daß die Ausübung irgendeiner der rationalen Rechenoperationen auf rationale Zahlen wieder auf rationale Zahlen führt. Wenn wir eine der vier rationalen Rechenoperationen auf komplexe Zahlen ausüben, so kommen wir allerdings wieder auf eine komplexe Zahl (nur für die Division war das noch nicht ausgeführt worden). Wie aber, wenn wir auch die Potenzierung und Radizierung in den Bereich der Rechenoperationen mit einbeziehen? Das sind Fragen, denen wir erst auf der Oberstufe wieder nachgehen werden.

Wurzelgleichungen.

33. Gleichungen, in denen die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen auftritt, wollen wir Wurzelgleichungen nennen. Wir beschränken uns auf das Vorkommen von Quadratwurzeln. Treten Brüche auf, so soll in ihrem Nenner die Unbekannte nicht auftreten. Es soll sich also um ganze Wurzelgleichungen, nicht um gebrochene handeln. Wenn gebrochene Wurzelgleichungen vorliegen, sind die Nenner, soweit sie die Unbekannte enthalten, erst durch geeignete Multiplikation zu beseitigen.

34. Die erste Aufgabe bei der Behandlung von Wurzelgleichungen ist die Entfernung der Quadratwurzel. Kommt nur eine Quadratwurzel in der Gleichung vor, so bringt man sie auf die eine Seite der Gleichung, quadriert und erhält dann eine wurzelfreie Gleichung. So löst man z. B. die Gleichung

$$13 - \sqrt{4x - 15} = 8,$$

indem man die Wurzel auf die eine Seite bringt,

$$\sqrt{4x - 15} = 5,$$

und quadriert

$$4x - 15 = 25.$$

Die Lösung der Gleichung ist, wie sich daraus ergibt,

$$x = 10.$$

35. Enthält die Gleichung eine Summe von Wurzelausdrücken, so ist das Verfahren der Lösung dann, wenn nur zwei Wurzelausdrücke vorkommen und kein wurzelloses Glied, das gleiche. Ist z. B.

$$2\sqrt{x - 8} = 3\sqrt{x - 18}$$

vorgelegt, so quadriert man wieder beiderseits und erhält

$$4(x - 8) = 9(x - 18),$$

und das ist eine lineare Gleichung.

36. Anders, wenn außer den Wurzeln noch ein wurzelfreies Glied oder aber eine dritte Wurzel vorkommt. Auch dafür ein Beispiel:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+7}=9.$$

Wenn man quadriert, so erhält man

$$x-2+2\sqrt{(x-2)(x+7)}+x+7=81.$$

Das ist aber eine Gleichung von der in Nr. 34 behandelten Art. Man muß also in solchem Falle zweimal quadrieren.

§ 10. Gleichungen und ganze Funktionen zweiten Grades.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung.

1. Eine Gleichung der Form

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

worin A, B und C bekannte oder als bekannt anzusehende Zahlen sind, heißt eine quadratische Gleichung. Dividiert man durch die von Null verschiedene Zahl A, dann kommt man auf die Form

$$x^2+\frac{B}{A}\cdot x+\frac{C}{A}=0,$$

oder wenn man für den Koeffizienten des linearen Gliedes und für das konstante Glied neue Bezeichnungen einführt,

$$x^2+ax+b=0.$$

Wir bezeichnen diese Form als die Normalform der quadratischen Gleichung. a und b werden als reelle Größen vorausgesetzt.

Besondere Formen der quadratischen Gleichung.

2. Fällt das quadratische Glied weg, liegt also eine Gleichung der Form

$$x^2+c=0$$

vor, so ergibt sich als Lösung dieser rein quadratischen Gleichung, nachdem man c auf die rechte Seite geschafft hat,

$$x_1=+\sqrt{-c},\quad x_2=-\sqrt{-c}.$$

Ist c positiv, so werden die beiden Wurzelwerte imaginär, ist c negativ, so werden sie reell.

3. Fällt das konstante Glied weg, so läßt sich die Gleichung

$$x^2+ax=0$$

auf die Form

$$x(x+a)=0$$

bringen. Da ein Produkt nur Null werden kann, wenn einer der Faktoren Null wird, so ergeben sich durch Nullsetzen der beiden Faktoren die beiden Wurzeln

$$x_1=0;\quad x_2=-a.$$

In der Tat überzeugt man sich durch Einsetzen in die Gleichung, daß beide Werte sie befriedigen.

Arithmetische Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung.

4. Man bringt die Gleichung auf die Form

$$x^2 + ax = -b$$

und fügt beiderseits, um die linke Seite zu einem vollständigen Quadrat zu machen, die quadratische Ergänzung $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ hinzu. Dann hat man

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b.$$

Schreibt man die linke Seite als Quadrat und macht rechts gleichnamig, so erhält man

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 4b}{4}.$$

Zieht man jetzt beiderseits die Quadratwurzel, beachtet aber dabei das doppelte Vorzeichen, so folgt

$$x + \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Die quadratische Gleichung hat also die beiden Wurzeln

$$\boldsymbol{x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.}$$

Setzt man in der erhaltenen Lösung $a = 0$, so kommt man auf die bereits oben (Nr. 2) behandelte rein quadratische Gleichung; setzt man $b = 0$, so erhält man den zweiten, oben (Nr. 3) besonders behandelten Fall.

5. Die Untersuchung des Radikanden der in der Lösung auftretenden Wurzel — man nennt ihn die Diskriminante der Gleichung — führt zur Unterscheidung von drei Fällen. Ist $a^2 > 4b$, der Radikand also positiv, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung reell. Ist hingegen $a^2 < 4b$, so sind beide Wurzeln komplex, und zwar konjugiert komplex. Ist schließlich $a^2 = 4b$, dann erhalten beide Lösungen den gleichen Wert, die quadratische Gleichung hat dann scheinbar nur eine Wurzel, die man als Doppelwurzel bezeichnet.

Die Form der Gleichung ist in diesem Falle

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = 0,$$

d. h. auf der linken Seite steht bereits ein vollständiges Quadrat; man braucht in diesem Falle gar nicht erst nach der quadratischen Ergänzung zu suchen; man erhält sofort durch Radizierung

$$x + \frac{a}{2} = 0; \quad x = -\frac{a}{2}.$$

Wurzelsatz von Vieta.

6. Es sei möglich, den Ausdruck auf der linken Seite der in Normalform geschriebenen quadratischen Gleichung in zwei Faktoren zu zerlegen:

$$x^2 + ax + b = (x - m)(x - n).$$

Dann sind m und n die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung, denn in der Tat wird sowohl für $x = m$ wie für $x = n$ der Ausdruck auf der linken

Seite der Gleichung Null. Wir können also in diesem Falle für m den Wert x_1, für n den Wert x_2 einsetzen. Nun ist

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Es ist also in diesem Falle

$$x^2 + ax + b = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Das legt die Frage nahe, ob bei jeder quadratischen Gleichung

(1) $$a = -(x_1 + x_2),$$

(2) $$b = x_1 \cdot x_2$$

ist. Bilden wir von den allgemeinen Lösungswerten der quadratischen Gleichung in Nr. 4 die Summe und das Produkt, so erhalten wir in der Tat:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}\right) + \left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}\right) = -a.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}(a^2 - 4b),$$

$$x_1 \cdot x_2 = b.$$

Die Beziehungen (1) und (2) zwischen den Wurzeln und Koeffizienten einer quadratischen Gleichung nennt man den Vietaschen Wurzelsatz.

Gleichungen, die auf quadratische führen.

7. Bruchgleichungen lassen sich auf gewöhnliche Gleichungen dadurch zurückführen, daß man durch geeignete Multiplikation die Nenner mit Unbekannten wegschafft. Von solchen Gleichungen war schon bei den linearen die Rede. Dann, wenn man auf quadratische Gleichungen kommt, empfiehlt es sich, durch die Probe festzustellen, ob beide Wurzeln der abgeleiteten Gleichung auch Wurzeln der Bruchgleichung sind.

8. Wurzelgleichungen, wie wir sie in § 9, Nr. 34 ff. behandelt haben, führen gleichfalls unter Umständen auf quadratische Gleichungen. Auch hier gilt das eben Gesagte; die Probe muß entscheiden, ob wirklich beide errechnete Lösungen der abgeleiteten Gleichung auch Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind. Bei dem Quadrieren der Wurzelgleichungen wird nämlich unter Umständen das Vorzeichen verwischt.

9. Gleichungen der Form

$$x^{2n} + ax^n + b = 0$$

lassen sich durch eine Substitution $y = x^n$ auf quadratische Gleichungen bringen. Deren Lösung liefert x^n und weiter dadurch, daß man die $n$te Wurzel zieht, x selber.

10. Eine Gleichung der Form

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

läßt sich auf die Form

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$$

bringen oder, da

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

ist, auf die Form

$$(x + 1) \cdot [a(x^2 - x + 1) + bx] = 0$$

Danach ist eine Wurzel $x_1 = -1$, die Probe bestätigt das; die anderen Wurzeln ergeben sich durch Lösung der Gleichung, die durch Nullsetzen des zweiten Faktors entsteht.

Ganz ähnlich verfährt man, wenn die Gleichung

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

vorgelegt ist; dann ist der eine Faktor $x - 1$, und er zeigt, daß die erste Wurzel $x_1 = 1$ ist.

Gleichungen dieser Form heißen symmetrische Gleichungen, hier im besonderen vom dritten Grade. Wenn man in ihnen x durch $\frac{1}{x}$ ersetzt, so erhält man eine Bruchgleichung, die nach Multiplikation mit dem Hauptnenner x^3 wieder in die ursprüngliche Gleichung übergeht. Man nennt diese Gleichungen daher auch reziproke Gleichungen.

11. Auch die reziproken Gleichungen vierten Grades lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Man dividiert die Gleichung

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

durch x^2 und erhält

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

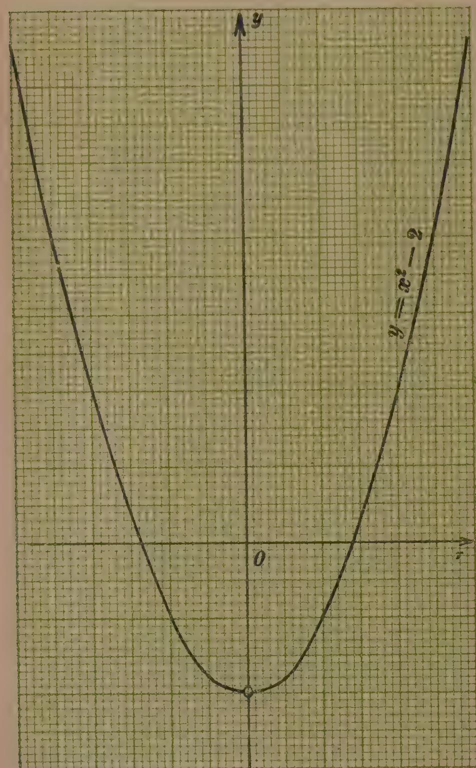


Fig. 40.

Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, so erhält man durch Quadrieren, daß $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ ist. Wir kommen also auf eine quadratische Gleichung für y. Aus den Lösungen für y erhalten wir dann wieder Lösungen für die ursprüngliche Unbekannte x. Ähnlich verfährt man, wenn das lineare und das konstante Glied negatives Vorzeichen haben.

Allgemeine ganze Funktion zweiten Grades und graphische Lösung der quadratischen Gleichung.

12. Wenn man die Kurve $y = x^2$ um m nach oben verschiebt, so heißt die zu der neuen Kurve gehörige Funktion $y - m = x^2$ oder

$$y = x^2 + m.$$

Verschiebt man die Parabel in gleicher Weise nach unten, so ist das konstante Zusatzglied negativ zu nehmen (in der Fig. 40 ist $m = -2$). Verschiebt man die Kurve $y = x^2$ um n nach rechts, so heißt die zu der neuen Kurve gehörige Funktion

$$y = (x - n)^2.$$

Einem negativen Wert von n entspricht eine Verschiebung nach links. In Fig. 41 ist $n = 2$ gewählt.

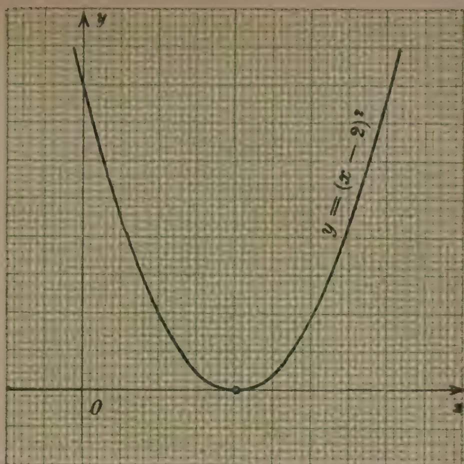


Fig. 41.

Bei gleichzeitiger Verschiebung um m nach oben (bzw. unten) und n nach rechts (bzw. links) erhält man eine Kurve, die der Funktion

$$y = (x - n)^2 + m,$$
$$y = x^2 - 2nx + (n^2 + m)$$

entspricht. In Fig. 42 ist $n = 2$, $m = -1$ gewählt.

13. Aus dem in Nr. 12 Abgeleiteten folgt, daß die ganze Funktion zweiten Grades

$$y = x^2 + ax + b$$

eine um $b - \frac{a^2}{4}$ nach oben (bzw. unten) und um $-\frac{a}{2}$ nach rechts (bzw. links) verschobene Parabel ist, denn man kann der Funktion die Form

$$y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

geben. In Fig. 42 ist z. B. die Funktion $y = x^2 - 4x + 3$ dargestellt.

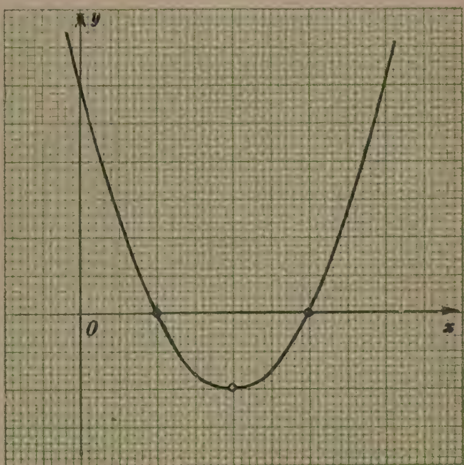


Fig. 42.

14. Die Nullstellen der Funktion $y = x^2 + ax + b$ entsprechen den Schnittpunkten der Kurve mit der x-Achse. Andererseits sind aber damit die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ gegeben. Wir haben damit eine neue graphische Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen gefunden. Man verschiebt die Parabel um die in Nr. 13 angegebenen Stücke und liest dann die x-Koordinaten der Nullstellen ab. In Fig. 42 sieht man z. B., daß die Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ die Wurzeln $+1$ und $+3$ hat. — Über die Genauigkeit und Ganzzahligkeit der Lösungen vgl. § 6, Nr. 12 und 14.

Bei dieser graphischen Lösungsmethode wird auch anschaulich, daß zwei reelle Wurzeln nur vorhanden sind, wenn $b - \frac{a^2}{4}$ negativ und damit die Diskriminante $a^2 - 4b$ positiv ist. Wird die Diskriminante Null, ist also die Verschiebung der Parabel in der Richtung oben—unten Null, dann ist nur eine einzige Nullstelle vorhanden; die Parabel berührt die x-Achse. Über die komplexen Wurzeln sagt die graphische Lösung nichts aus.

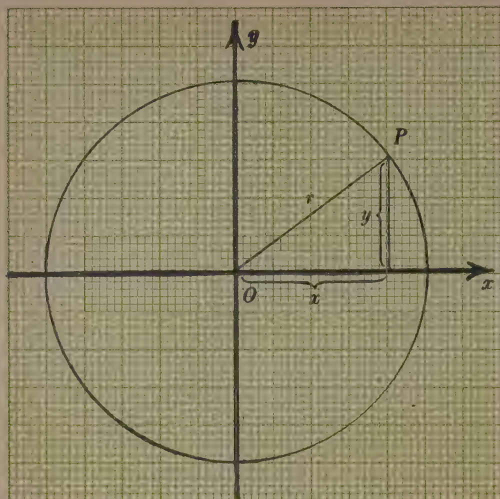


Fig. 43.

Einige einfache algebraische Funktionen zweiten Grades.

15. Bisher waren die Funktionen meist in der Form dargestellt, daß die abhängige Veränderliche durch die unabhängige Veränderliche ausgedrückt erschien. Das ist nicht durchaus notwendig. Man spricht auch von einer Funktion, wenn abhängige und unabhängige Veränderliche durch irgendeine Gleichung (Funktionsgleichung) verbunden sind. Eine einfache Funktion dieser Art ist die folgende

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

r ist darin eine Konstante. Das Quadrat ist geschrieben, damit die Konstante r^2 nur positiver Werte fähig ist. Natürlich kann man diese Funktion auch nach y auflösen. Man findet

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Graphisch entspricht dieser Funktion ein Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt. Man überzeugt sich davon in der Weise, daß man irgendeinen Punkt des Kreises mit dem Koordinatenanfangspunkt verbindet (Fig. 43), dann ist für jeden Kreispunkt und nur für einen solchen nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

16. Verschiebt man den Kreis so, daß die Koordinaten des Mittelpunktes M a und b sind, dann ist die zu dem neuen Kreis gehörige Funktion

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

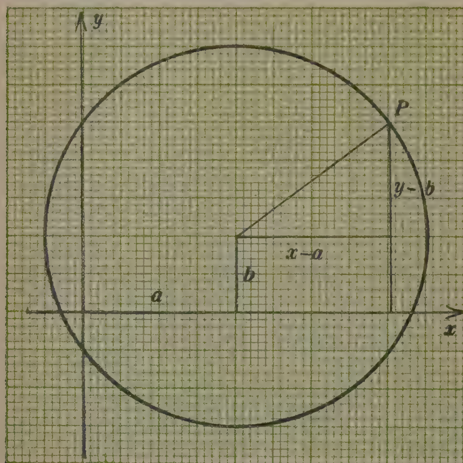


Fig. 44.

Man braucht, um das zu sehen, nur den pythagoreischen Lehrsatz auf ein rechtwinkliges Dreieck anzuwenden, dessen Katheten $x - a$ und $y - a$ sind (Fig. 44).

17. Die Funktion

$$x^2 - y^2 = r^2$$

wird, wovon man sich durch Ausrechnung und Konstruktion einzelner Punkte überzeugt, durch eine zweiästige Kurve dargestellt, die der in § 8, Nr. 5 behandelten Hyperbel gleicht, nur daß sie um 45° um den Nullpunkt gedreht ist. Wird diese Hyperbel ohne Dre-

hung so verschoben, daß der Mittelpunkt die Koordinaten a und b hat, so wird die Form der neuen Funktion

$$(x-a)^2-(y-b)^2=r^2.$$

Einfache Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

18. Gegeben ist die Summe oder die Differenz der Unbekannten und das Produkt. Da die Funktion $yx = b$ nichts anderes als die Hyperbel $y = bx^{-1}$ ist, ergibt sich die Lösung des Gleichungspaares graphisch als Schnitt einer Geraden und einer Hyperbel. Die arithmetische Lösung läßt sich in der Weise finden, daß man die eine Unbekannte aus der ersten Gleichung ausdrückt, sie in die zweite Gleichung einsetzt und damit auf eine Gleichung zweiten Grades zur Bestimmung einer Unbekannten kommt. Die zweite Unbekannte ist dann aus der Substitutionsgleichung zu finden. Einfacher ist das folgende Verfahren:

$$x+y=a; \quad xy=b.$$

Durch Quadrieren erhält man aus der ersten Gleichung

$$x^2+2xy+y^2=a^2.$$

Zieht man davon $4xy = 4b$ ab, so hat man

$$x^2-2xy+y^2=a^2-4b,$$

und wenn man daraus wieder die Wurzel zieht,

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

Jeder dieser zwei Werte liefert zusammen mit der ersten der gegebenen beiden Gleichungen nach der Additionsmethode (vgl. § 5, Nr. 13) ein Lösungspaar. Es wird

$$x_1=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b},$$

$$y_1=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b},$$

$$x_2=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b},$$

$$y_2=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}.$$

Die in die Augen springende Übereinstimmung mit den Lösungen der quadratischen Gleichung ergibt sich aus dem Wurzelsatz von Vieta (vgl. Nr. 4 und 6).

Ist statt der Summe der Unbekannten die Differenz gegeben, so verschafft man sich in ähnlicher Weise die Summe der Unbekannten und verfährt ebenso wie oben.

19. Gegeben ist die Summe der Quadrate der Unbekannten und das Produkt der Unbekannten:

$$x^2+y^2=a$$
$$xy=b.$$

Graphisch ergibt sich die Lösung als Schnitt eines Kreises mit einer Hyperbel. Arithmetisch kann man die Gleichungen lösen, indem man das Doppelte der letzten Gleichung zu der ersten einmal addiert und zum andern von ihr subtrahiert und dann die Quadratwurzel zieht; so erhält man die Summe und die Differenz der Unbekannten. Die Addi-

tionsmethode liefert dann die Lösung. Beachtet man beide Vorzeichen der Quadratwurzel, so kommt man auf vier Lösungspaare.

20. Gegeben ist die Differenz der Quadrate der Unbekannten und die Summe oder Differenz der Unbekannten. Graphisch ergibt sich die Lösung als Schnitt einer Geraden mit einer Hyperbel. Für die arithmetische Lösung genügt es, falls die Summe der Unbekannten gegeben, die Differenz, falls die Differenz gegeben, die Summe zu finden. Das geschieht durch Division der ersten Gleichung durch die zweite, indem man beachtet, daß $x^2 - y^2$ in das Produkt $(x + y)(x - y)$ zerfällt werden kann.

21. Gegeben ist die Summe der Quadrate der Unbekannten und die Summe oder Differenz der Unbekannten. Graphisch liegt hier der einfache Fall eines Schnittes von Kreis und Gerade vor. Arithmetisch kann man in der Weise vorgehen, daß man sich zunächst durch Quadrieren der Summe oder der Differenz den Ausdruck $x^2 + 2xy + y^2$ bzw. $x^2 - 2xy + y^2$ verschafft. Indem man davon die Summe der Quadrate der Unbekannten subtrahiert, erhält man $2xy$ oder $-2xy$ und damit xy. So ist dieser Fall auf den in Nr. 19 behandelten zurückgeführt.

22. Nur in vereinzelten Fällen werden die Gleichungen so einfach sein, daß einer der in Nr. 18 bis 20 behandelten Fälle vorliegt. Es wird aber nicht selten möglich sein, Gleichungen durch Umwandlungen oder Substitutionen auf diese Fälle zurückzuführen. Es soll nun noch ein allgemeinerer Fall mit Beschränkung auf den arithmetischen Lösungsweg behandelt werden. Die eine der vorgelegten Gleichungen sei vom zweiten Grade, die andere vom ersten. Man hat also

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$gx + hy + k = 0,$$

worin $a, b, \ldots k$ als bekannt vorauszusetzende reelle Zahlen sind.

Dann kann man immer die eine Unbekannte, etwa y, aus der linearen Gleichung in Gestalt einer linearen Substitution ausdrücken,

$$y = px + q,$$

und in die erste Gleichung einsetzen. Diese wird dann immer in x quadratisch. Die beiden Lösungswerte für x setzt man in die Substitutionsgleichung ein und erhält die entsprechenden Werte für y.

23. Das Problem der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten ist in seiner allgemeinsten Form bisher noch nicht angegriffen, wir kommen auf der Oberstufe darauf zurück. Die Fälle, die wir behandelt haben, lassen erkennen, daß dann, wenn beide Gleichungen vom zweiten Grade sind, vier Lösungspaare, dann, wenn eine vom zweiten Grade, die andere vom ersten Grade ist, zwei Lösungspaare vorhanden sind.

§ 11. Die Logarithmen.

Die Exponentialfunktion.

1. Die Funktion $y = a^x$ ist, nachdem der Potenzbegriff auf gebrochene Exponenten ausgedehnt ist, für reelle Werte der Basis a und für alle rationalen Werte der Veränderlichen definiert; wir machen noch die einschränkende Bedingung, daß die Basis a positiv ist, um komplexe Werte auszuschalten, und beachten, daß das Wurzelzeichen sich auf den Hauptwert bezieht, so daß die Funktion für alle rationalen Werte eindeutig ist.

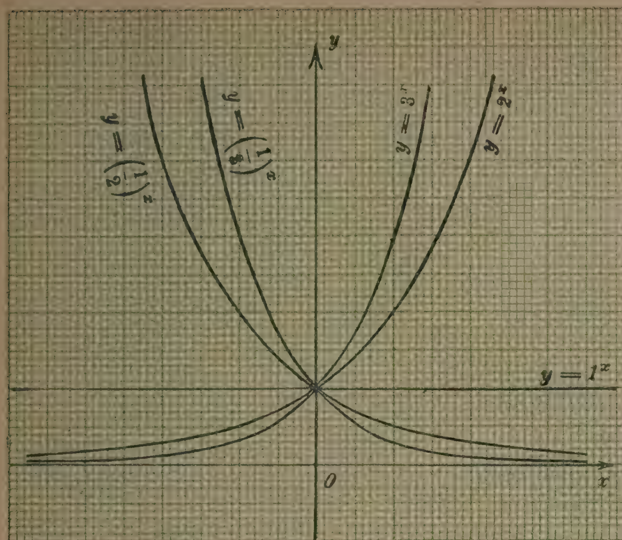


Fig. 45.

Wir wollen nun auch zulassen, daß die Veränderliche eine irrationale Zahl sein kann. Den Wert der Potenz nähern wir an, indem wir Näherungswerte für den Exponenten benutzen. Die Funktion $y = a^x$, wo a eine positive reelle Zahl ist, nennen wir die Exponentialfunktion.

2. In Fig. 45 sind die Funktionen $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 1^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$ graphisch dargestellt. Die Exponentialkurve mit der Basis 1 ist natürlich die Gerade $y = 1$. Alle Exponentialkurven gehen durch den Punkt (0, 1).

Die Bilder von Funktionen, deren Basis größer als 1 ist, steigen im ersten Quadranten mit wachsendem x an, und zwar um so schneller, je größer die Basis ist; im zweiten Quadranten schmiegen sie sich mit fallendem x immer mehr der x-Achse an. Ist die Basis ein echter Bruch, dann geschieht die Anschmiegung an die x-Achse im ersten Quadranten, der Anstieg im zweiten Quadranten.

Der Begriff des Logarithmus.

3. Ist $a^n = b$, so nennt man n den Logarithmus von b für die Basis a und schreibt $n = {}^a\log b$. b nennt man Logarithmandus oder Numerus, a die Basis des Logarithmus. So kann man beispielsweise $2^3 = 8$ umschreiben in die Gleichung $3 = {}^2\log 8$. Um das Auftreten der komplexen Größen zu vermeiden, setzen wir die Basis a wieder als positive reelle Zahl voraus. Unter dieser Voraussetzung gehört zu jeder reellen Zahl n ein einziger reeller Wert a^n.

4. Wir hatten bei der Einführung der ersten Rechenoperation dritter Stufe, der Potenzierung, festgestellt, daß bei ihr das kommutative Gesetz nicht gilt. Das ist der Grund dafür, daß wir bei der Umkehrung der Potenzierung auf zwei verschiedene Rechenoperationen kommen, je nachdem nach der Basis oder nach dem Exponenten gefragt wird. Wird die Gleichung $a^b = c$ nach a aufgelöst, so komme ich auf die Radizierung; es ist $a = \sqrt[b]{c}$. Frage ich aber nach dem Exponenten b, so komme ich auf die Logarithmierung; es ist $b = {}^a\log c$. Wir sind damit auf insgesamt sieben, auf drei Stufen verteilte Rechenoperationen gekommen.

Die logarithmische Funktion.

5. Wir bezeichnen als logarithmische Funktion die Funktion $y = {}^a\log x$, wählen also den Numerus als unabhängige, den Logarithmus als abhängige Veränderliche; die Basis bleibt konstant. Um die Funktion graphisch darzustellen, kön-

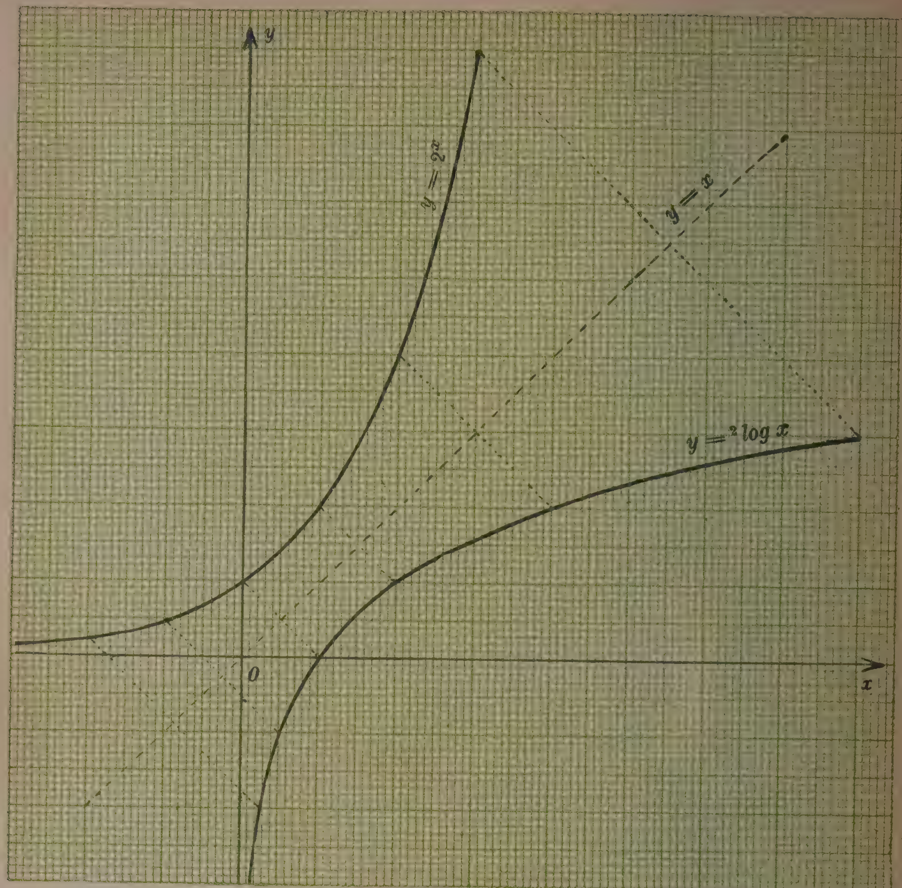


Fig. 46

nen wir sie — ähnlich wie wir bei der graphischen Darstellung der Wurzelfunktionen verfuhren — durch Spiegelung der zu ihr inversen Funktion $y = a^x$ an der Geraden $y = x$ gewinnen. Fig. 46 zeigt die Kurve für den Fall der Basis $a = 2$. Die Kurve liegt ganz in der rechten Halbebene; sie schmiegt sich, je mehr x sich der Null nähert, desto mehr der negativen y-Achse an. Die x-Achse schneidet sie im Punkte $x = 1$; mit wachsendem x nimmt sie selbst zu. Die Funktion steigt also in ihrem ganzen Verlaufe, im Intervall von 0 bis 1 ist sie negativ, im Intervall von 1 bis ∞ positiv.

Die Überlegungen bei der Exponentialfunktion (vgl. Fig. 45) lehren, daß die Funktion im Falle der Basis $a = 1$ zu einer Geraden wird, daß sie, wenn ein echter Bruch als Basis gewählt wird, zwischen 0 und 1 positiv wird (sich also in der Nähe von $x = 0$ an die positive y-Achse anschmiegt), zwischen 1 und ∞ hingegen negativ.

6. Die Logarithmen, die zur gleichen Basis gehören, bilden ein **Logarithmensystem**. Für die Rechnung beschränken wir uns an dieser Stelle auf die Logarithmen mit der Basis 10, die **dekadischen** oder **Briggschen** Logarithmen. Bei ihnen läßt man die Angabe der Basis fort. $\log a$ bedeutet also ${}^{10}\log a$.

Die Logarithmengesetze.

7. Gesetze über Logarithmen sind eigentlich nichts anderes als Gesetze über die Exponenten von Potenzen. Sie lassen sich deshalb aus den Potenzgesetzen herleiten, wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, daß bei fester Basis jedem Logarithmus nur ein Numerus, jedem Numerus nur ein Logarithmus entspricht. Wir beschränken uns auf Gesetze, die für Angehörige eines und desselben Logarithmensystems gelten. Wir sprechen sie aus für dekadische Logarithmen, sie gelten aber ebenso auch für jede andere Basis.

8. Es ist

$$\log ab = \log a + \log b, \tag{1}$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \tag{2}$$

Es sei $a = 10^p$, $b = 10^q$, dann ist $\log a = p$ und $\log b = q$. Es ist also

$$a \cdot b = 10^p \cdot 10^q = 10^{p+q},$$

$$\frac{a}{b} = 10^p : 10^q = 10^{p-q}.$$

Die erste Gleichung wird in $\log ab = p + q$ umgeschrieben oder, wenn wir die Werte von p und q einsetzen,

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Ebenso schreibt man die zweite Gleichung in $\log \frac{a}{b} = p - q$ um und erhält das Gesetz (2).

9. Es ist

$$\log (a^n) = n \log a, \tag{3}$$

$$\log (\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \log a. \tag{4}$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so läßt sich a^n als ein Produkt aus n Faktoren auffassen, der Satz folgt also aus dem ersten Gesetz (Nr. 8), das auf mehrere Faktoren ausgedehnt werden kann. Auch wenn n eine negative ganze Zahl ist, kann man in dieser Weise verfahren und dabei das zweite Gesetz anwenden. Die Potenzgesetze liefern uns aber auch sofort einen Beweis des Gesetzes, der für irgendwelche Exponenten n, also auch für gebrochene gilt. Mit diesem Beweis ist zugleich auch Satz (4) erledigt, da sich die Wurzelausdrücke auch mit gebrochenen Potenzen schreiben lassen. Es sei $a = 10^p$, also $\log a = p$, dann ist $a^n = (10^p)^n = 10^{pn}$, also $\log a^n = np$. Setzt man den Wert von p ein, so erhält man die gewünschte Gleichung (3).

10. Die vier Logarithmengesetze lassen sich dahin zusammenfassen, daß durch das Logarithmieren die Stufe der Rechenoperation um eine vermindert wird, daß also die Multiplikation auf die Addition, die Division auf die Subtraktion, die Potenzierung auf die Multiplikation, schließlich die Radizierung auf die Division führt. In dieser Tatsache liegt die Bedeutung der Logarithmen für das praktische Rechnen.

Die Logarithmentafel.

11. Von der logarithmischen Kurve $y = \log x$ kann man in einem vorgegebenen Intervall, etwa von 1 bis 10, beliebig viele Punkte rechnerisch in vorgeschriebener Genauigkeit bestimmen. Man erhält z. B. sieben Punkte, wenn man durch

mehrfaches Quadratwurzelziehen $\sqrt[8]{10} = 1{,}3335$ bestimmt und damit die folgende Reihe

$$\log 10^{\frac{1}{8}} = \log 1{,}334 = 0{,}125,$$

$$\log 10^{\frac{2}{8}} = \log 1{,}778 = 0{,}250,$$

$$\log 10^{\frac{3}{8}} = \log 2{,}371 = 0{,}375,$$

$$\log 10^{\frac{4}{8}} = \log 3{,}162 = 0{,}500,$$

$$\log 10^{\frac{5}{8}} = \log 4{,}217 = 0{,}625,$$

$$\log 10^{\frac{6}{8}} = \log 5{,}623 = 0{,}750,$$

$$\log 10^{\frac{7}{8}} = \log 7{,}499 = 0{,}875.$$

Wenn man von $\sqrt[16]{10}$ ausgeht, erhält man ebenso 15 Punkte usf. Danach läßt sich die logarithmische Kurve mit irgendwie vorgeschriebener Genauigkeit zeichnen, und aus der Zeichnung kann man den Logarithmus irgendeiner Zahl ablesen. Auch rechnerisch kann man ihn durch Interpolation finden. — Auf diesem Wege könnten die Logarithmen einer Logarithmentafel gefunden sein. Tatsächlich sind die Zahlen auf anderem, schneller zum Ziele führenden Wege berechnet, worüber in der Oberstufe zu sprechen sein wird.

12. Die Logarithmen der Zehnerpotenzen sind im dekadischen Logarithmensystem ganze Zahlen. Es ist $\log 10^n = n$, insbesondere ist $\log 10 = 1$. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 sind positive echte Brüche; sie werden, wenn die Numeri rationale Zahlen sind, irrationale Zahlen. Wir wollen sie immer als Dezimalbrüche darstellen, die wir auf vier oder fünf Stellen nach dem Komma abrunden.

Es ist nun sofort zu zeigen, daß man mit den Logarithmen im Intervall von 1 bis 10, auf das wir uns in Nr. 11 beschränkt hatten, alle Logarithmen beherrscht. Es sei z. B. der Logarithmus 2 bekannt; er ist 0,30103. Dann kennt man auch z. B

$$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 1{,}30103,$$

$$\log 200 = \log(2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 = 2{,}30103,$$

$$\log 0{,}02 = \log(2 \cdot 10^{-2}) = \log 2 - 2\log 10 = 0{,}30103 - 2.$$

Man könnte den letzten Wert noch in eine negative Zahl umwandeln, man zieht es aber vor, ihn so als Differenz eines positiven echten Bruches und einer ganzen Zahl stehen zu lassen.

13. Für den Logarithmus einer Zahl ist also wesentlich 1) ein auf vier oder fünf Stellen (je nach der Stellenzahl, die man berücksichtigen will) abgekürzter echter Dezimalbruch, die M a n t i s s e, 2) eine zu addierende oder zu subtrahierende ganze Zahl, die K e n n z i f f e r. Die Mantisse hängt nur von der Ziffernfolge ab, die Kennziffer nur vom Stellenwert der ersten Ziffer, mit anderen Worten von dem Zehnerpotenzen-Intervall, in das die Zahl gehört.

14. Die Logarithmentafel liefert nur die Mantisse, die Kennziffer muß man selbst hinzufügen. Um den Logarithmus einer Zahl, etwa von 3010, festzustellen, bestimme ich zunächst die Kennziffer. Die Zahl liegt zwischen 10^3 und 10^4, die

Kennziffer ist also 3. Allgemein ist die Kennziffer einer Zahl, die n Stellen vor dem Komma hat, $n-1$. Aus der Tafel habe ich nun die Mantisse zu entnehmen. Die Tafel läßt den bei jeder Zahl zu wiederholenden Anfang 0 weg, sie gibt nur die Folge der nach dem Komma stehenden Ziffern. Benutzt man eine vierstellige Logarithmentafel, so entnimmt man ihr unter 301 den Wert 4786, benutzt man eine fünfstellige Tafel, so findet man 47857. Das heißt also, es ist $\log 3{,}01 = 0{,}4786$ bzw. 0,47857. Die aus Kennziffer und Mantisse zusammengesetzte Zahl, der Logarithmus von 3010, lautet jetzt also 3,4786 bzw. 3,47857.

Handelt es sich um eine Zahl, die kleiner als 1 ist, so verfährt man ebenso. Die Kennziffer von 0,0538 z. B. ist -2, denn die Zahl liegt zwischen 10^{-2} und 10^{-3}. Allgemein ist die Kennziffer gleich der Anzahl der Nullen am Anfang der Dezimalzahl, wobei die Einernull mitgerechnet ist. Die Logarithmentafel liefert dann die Mantisse 7308 bzw. 73078. Man hat also $\log 0{,}0538 = 0{,}7308 - 2$ oder bei fünfstelligen Logarithmen $0{,}73078 - 2$.

15. Man kann im allgemeinen in den vierstelligen Tafeln nur die Logarithmen der dreistelligen Zahlen finden, ebenso in den fünfstelligen Tafeln die Logarithmen der vierstelligen Zahlen. Die Berücksichtigung einer weiteren Stelle ist aber sehr leicht möglich, indem man interpoliert. Es sei in Fig. 47, die nur schematisch ist, der Punkt P_1 und ebenso der Punkt P_2 ein nach der Tafel angebbarer Punkt der logarithmischen Kurve, etwa der zu log 2,17 gehörige Wert 0,3365 und der zu 2,18 gehörige Wert 0,3385. Ich kann nun zwischen diesen beiden Punkten die Kurve durch die Sekante P_1P_2 ersetzen. Der Fehler, den ich dabei begehe, fällt schon deshalb nicht ins Gewicht, weil ja die Werte 0,3365 und 0,3385 selbst nur Näherungswerte sind; sie sind ja nur auf vier Stellen genau. Handelt es sich nun um den Logarithmus der Zahl 2,178, so wird der Streifen zwischen P_1 und P_2 in zehn gleiche Teile geteilt, und ich lese den zu 2,178 gehörigen Wert der logarithmischen Kurve anstatt auf dieser selbst auf der Sekante ab. Dabei begehe ich zwar einen Fehler, er ist aber sehr gering.

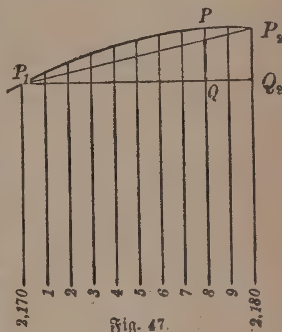


Fig. 47.

Man liest nun den Wert nicht in der Figur ab, sondern berechnet ihn auf Grund der gegebenen Größen. Man muß nur zu dem Logarithmus von 2,17 die Korrektur hinzufügen, die durch die Strecke PQ gegeben ist. Wendet man den zweiten Teil des Strahlensatzes auf den von der Parallelenschar geschnittenen Winkel $P_2P_1Q_2$ an, so sieht man, daß die Korrekturen $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ usf. sind, insbesondere also PQ $\frac{8}{10}$ der Strecke P_2Q_2 ist. Die aus den Tafelwerten durch Subtraktion zu findende Tafeldifferenz ist in unserem Falle 0,0020, $\frac{8}{10}$ davon ist 0,0016. Wir haben also noch 0,0016 zu 0,3365 zu addieren, um den Logarithmus von 2,178 zu erhalten. Das Ergebnis ist 0,3381.

Die Tafeln erleichtern die Interpolation vielfach noch dadurch, daß sie auf kleinen Täfelchen die in Betracht kommenden Vielfachen vereinigen. Ist die Tafeldifferenz beispielsweise — vom Stellenwert abgesehen — 18, so brauche ich die Vielfachen von 1,8. Lautet die noch durch Interpolation zu berücksichtigende letzte Stelle etwa 7, so nimmt mir das Täfelchen die Aufgabe $1{,}8 \cdot 7 = 12{,}6$ ab; ich kann also sofort die Korrektur 12,6 oder abgekürzt 13 nach der Tafel angeben.

Bei der Verwendung fünfstelliger Tafeln sind die Überlegungen genau die gleichen, nur daß man mit fünfstelligen Zahlen statt wie eben mit vierstelligen arbeitet.

16. Die Umkehrung der eben gestellten Aufgabe besteht darin, zu einem gegebenen Logarithmus den Numerus zu suchen. Man hat dafür zuweilen besondere, in genau der gleichen Weise wie die eben behandelten Logarithmentafeln eingerichtete Tabellen. Meist arbeitet man aber mit den Logarithmentafeln selbst. Wenn die Mantisse des Logarithmus, dessen Numerus man sucht, gerade in der Tafel steht, so ist die Aufsuchung sehr schnell getan. Ist z. B. x in $\log x = 4{,}8814$ gesucht, so zeigt mir die vierstellige Tafel, daß die Ziffernfolge der gesuchten Zahl 761 ist, und die Kennziffer gibt an, daß die erste Ziffer Zehntausender sind. Der gesuchte Numerus ist also 76100. Ebenso ergibt sich bei einer fünfstelligen Tafel bei $\log x = 4{,}88144$ nach der Tafel die Ziffernfolge 7611 und nach der Kennziffer wieder die erste Ziffer als Zehntausender. Wir haben also 76110 als gesuchten Numerus. Steht der Logarithmus nicht in der Tafel, so ist die letzte Stelle des Numerus durch Interpolation zu finden.

§ 12. Arithmetische und geometrische Reihen.

Begriff der arithmetischen Reihe.

1. Eine Reihe ist eine gesetzmäßig gebildete Folge von Zahlen. Die Zahlen heißen Glieder der Reihe.

Eine Reihe heißt steigend, wenn jedes Glied größer ist als das vorhergehende, sie heißt fallend, wenn jedes Glied kleiner ist als das vorhergehende.

2. Eine Reihe von Zahlen der Art, daß die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Zahlen einen konstanten Wert hat, heißt eine arithmetische Reihe. So ist z. B. die Reihe der Zahlen

$$7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ \ldots$$

eine arithmetische Reihe mit der Differenz 4.

Natürlich muß man, um Irrtümer zu vermeiden, festsetzen, in welchem Sinne die Differenz zu bilden ist: Minuendus ist irgendein Glied der Reihe, Subtrahendus das vorhergehende Glied.

Allgemein erhält man als Ausdruck einer arithmetischen Reihe, dessen Anfangsglied a und dessen ständige Differenz d ist,

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,$$

wenn wir uns mit vier Gliedern begnügen. Der Ausdruck für das $n$te Glied ist

(1) $$z = a + (n-1)\,d.$$

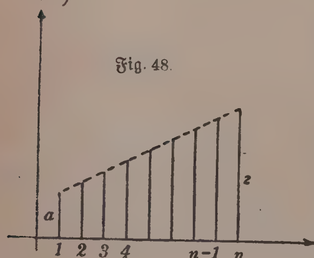


Fig. 48.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß a und d reelle Zahlen sind. n ist eine positive ganze Zahl.

3. Fig. 48 veranschaulicht die Glieder einer arithmetischen Reihe in der Weise, daß im Punkte 1 der x-Achse die Maßzahl des ersten Gliedes, im Punkte 2 die des zweiten Gliedes usf. als Ordinate aufgetragen ist. In der Figur ist $a = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $n = 9$ gewählt. Die Endpunkte der einzelnen Strecken liegen auf einer

Geraden, die uns von der graphischen Darstellung einer ganzen Funktion ersten Grades her bereits bekannt ist (§ 6, Nr. 7).

Summation der arithmetischen Reihe.

4. Um für die Summe einer arithmetischen Reihe einen geschlossenen Ausdruck zu erhalten, addiert man

$$s = a + a + d + a + 2d + \cdots + z - d + z$$
$$s = z + z - d + z - 2d + \cdots + a + d + a,$$

wobei die Summe in der zweiten Zeile in der Weise geschrieben ist, daß die Reihenfolge der Summanden umgekehrt ist; man erhält, indem man jeweils die untereinanderstehenden Glieder zusammenfaßt,

$$2s = a + z + a + z + a + z + \cdots + a + z + a + z.$$

Das ist aber

$$2s = n(a + z).$$

So erhält man die Summenformel

$$s = \frac{n}{2}(a + z). \tag{2}$$

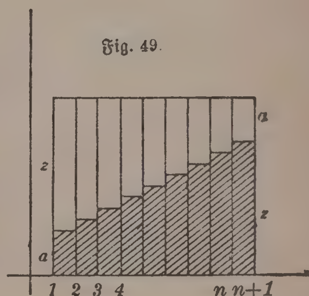


Fig. 49.

5. In Fig. 49 ist zur graphischen Darstellung der arithmetischen Reihe ein anderes Verfahren angewandt. Die einzelnen Glieder sind nicht durch Strecken, sondern durch Rechtecke von der Breite 1 dargestellt. Die Summe s der Reihe wird dann durch die schraffierte, treppenförmige Fläche veranschaulicht. Durch umgedrehtes Aufsetzen einer ebensolchen Fläche, die dann $2s$ darstellt, erhält man ein Rechteck von der Höhe $a + z$ und der Breite n. Es ist also $2s = n(a + z)$ wie in Nr. 4.

6. Setzt man in der Summenformel (2) an Stelle von z den Wert von z nach der Endgliedformel (1) ein, so erhält man

$$s = \frac{n}{2}(a + a + (n - 1)d),$$

$$s = an + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d. \tag{3}$$

Begriff der geometrischen Reihe.

7. Eine Reihe von Zahlen der Art, daß der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Zahlen einen konstanten Wert hat, heißt eine geometrische Reihe. So ist z. B. die Reihe der Zahlen

4, 12, 36, 108, 324

eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 3.

Allgemein erhält man als Ausdruck einer geometrischen Reihe, deren Anfangsglied a und deren ständiger Quotient q ist,

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3,$$

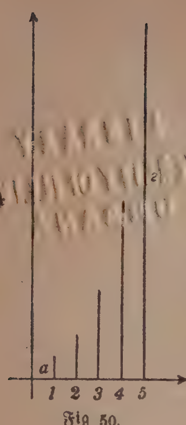


Fig. 50.

wenn wir uns mit vier Gliedern begnügen. Der Ausdruck für das $n$te Glied ist

(1) $$z = aq^{n-1}.$$

Wir beschränken uns auf den Fall, daß a und q reelle Zahlen sind. n ist eine positive ganze Zahl.

8. Fig. 50 veranschaulicht die Glieder einer geometrischen Reihe in der Weise, daß im Punkte 1 der x-Achse die Maßzahl des ersten Gliedes, im Punkte 2 die des zweiten Gliedes usf. als Ordinate aufgetragen ist. In der Figur ist $a = 1$, $q = 2$, $n = 5$ gewählt. Die Endpunkte der einzelnen Strecken liegen auf der im Verhältnis $1 : a$ in der Richtung der positiven y-Achse verzerrten Exponentialkurve (vgl. § 11, Nr. 2).

Summation der geometrischen Reihe.

9. Um für die Summe einer geometrischen Reihe einen geschlossenen Ausdruck zu erhalten, subtrahiert man von

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1}$$
$$sq = \quad aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Man erhält, da bei der Subtraktion bis auf das erste Glied der ersten und das letzte Glied der zweiten Zeile alle Glieder wegfallen,

$$s - sq = a - aq^n.$$

Klammert man links s und rechts a aus und beseitigt den Faktor von s, so folgt die Summenformel

(2) $$s = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Diese Formel wird man anwenden, wenn Zähler und Nenner positiv werden, d. h. wenn q kleiner als 1 ist. Ist q größer als 1, dann erweitert man den Bruch zweckmäßig mit -1 und erhält

(2′) $$s = a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Für den Fall, daß $q = 1$ ist, nimmt die Summenformel auf der rechten Seite den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an. Es liegt dann aber der sehr einfache Fall vor, daß alle Glieder der geometrischen Reihe gleichgroß sind; die Summe der n-gliedrigen Reihe ist also einfach $n \cdot a$.

10. Will man eine Summenformel haben, in der an Stelle der Gliederzahl n das Endglied z auftritt, so ersetzt man aq^n durch zq und erhält

(3) $$s = \frac{a - zq}{1-q},$$

wenn q kleiner als 1 ist, andernfalls

(3′) $$s = \frac{zq-a}{q-1}.$$

Zinseszinsrechnung.

11. Ist ein Anfangskapital a zu $p\,\%$ ausgeliehen, so betragen die Zinsen im ersten Jahre $\frac{ap}{100}$. Das Kapital ist also am Jahresende mit den Zinsen auf

$a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ angewachsen. Die Zinsen dieses Kapitals im zweiten Jahre betragen $a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}$. Am Ende des zweiten Jahres ist also das Kapital auf $a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}$ angewachsen, d. h. auf $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$. Das Endkapital am Ende des dritten Jahres ist $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$, allgemein am Ende des $n$ten Jahres $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. Führt man den Zinsfaktor

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

ein, so ergibt sich als Formel für das Endkapital b nach n Jahren

$$b = aq^n.$$

Hierin ist n eine ganze Zahl.

12. Ist das Endkapital bekannt und das Anfangskapital gesucht, so findet man

$$a = \frac{b}{q^n}.$$

Ist die Anzahl der Jahre oder der Zinsfaktor (und damit der Prozentsatz gesucht), so logarithmiert man die Grundformel in Nr. 11 und findet

$$\log b = \log a + n \log q.$$

Daraus folgt

$$n = \frac{\log b - \log a}{\log q},$$

$$\log q = \frac{\log b - \log a}{n}.$$

Barbey-Ziegmann Aufgabensammlung. I. B. Realausgabe. 8. Aufl.

Betriebs-Amt Waldenburg / **Betr.-Amt Glatz.**

Station	Höhe	km
Dittersbach	507,33	344,83
Steingrund	518,69	348,16
Charlottenbrunn	495,97	350,78
Wüstegiersdorf	485,20	353,56
Ober-Wüstegiersdorf	495,03	355,81
Königswalde	537,31	360,60
Nieder-Königswalde		362,63
Ludwigsdorf	476,43	367,01
Centnerbrunn		368,70
Ruben-Grube	429,94	372,04
Neurode	420,11	374,11
Mittelsteine	354,26	381,76
Möhlten	315,23	388,22
Birgwitz	312,83	391,11
Glatz-Hbf.	286,79	395,83
Glatz-Stadt		

Personenzug — Güterzug — Bedarfs-Personenzug — Leerfahrt

Schnellzug — Bedarfs-Güterzug — Personenz. m. Güterbef. — Bedarfs-Leerfahrt


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.76 L623AB19 C001 v.1
Aufgabensammlung und Leitfaden fur Arith
3 0112 088396400